Задача 103829 Темы: [Шахматные доски и шахматные фигуры] [Примеры и контрпримеры. Конструкции]

Сложность: 3
Классы: 7

Автор: Евдокимов М.А.

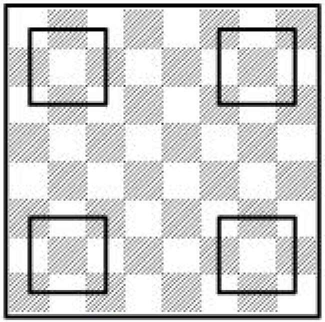
Расставьте на шахматной доске 32 коня так, чтобы каждый из них бил ровно двух других.

Подсказка

В квадрате 3×3 можно обойти ходом коня все клетки, кроме центральной, и вернуться в исходную клетку.

Решение

Если в квадрате 3×3 поставить коней на все клетки, кроме центральной, то каждый конь будет бить ровно двух других. Теперь расположим четыре таких "каре" на доске подальше друг от друга – так чтобы кони из разных каре не били друг друга (см. рисунок).



Добавить

Прислать комментарий

Задача 103834 Темы: [Арифметика остатков (прочее)] [Примеры и контрпримеры. Конструкции]

Сложность: 3
Классы: 6,7,8

Автор: Шаповалов А.В.

На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу – на одну монету больше. Какова наименьшая возможная цена покупки?

Подсказка

Мостик - остатки по модулю 7

Остаток от деления 1, 15 и 50 на 7 равен 1.

Решение

Остаток от деления на 7 достоинства каждой из монет равен 1. Пусть Незнайка отдал k монет на сумму A и получил сдачу C. Тогда $A \equiv k \pmod 7$, а $C \equiv k+1 \pmod 7$. Поэтому цена покупки $A - C \equiv 6 \pmod 7$. Следовательно, эта цена покупки не может быть меньше 6 фертингов.

Пример, когда покупка стоит 6 фертингов: Незнайка заплатил две монеты – 1 фертинг и 50 фертингов, а сдачу получил тремя монетами по 15 фертингов.

Ответ

6 фертингов.

Задача **103995** [Делимость на 7] Тема: [Признаки делимости (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 8,9

Дано трёхзначное число, у которого первая и последняя цифра одинаковые.
Доказать, что число делится на 7 тогда и только тогда, когда делится на 7 сумма второй и третьей цифр.

Решение

Системы счисления и эквивалентные делимости

Обозначим первую цифру нашего числа буквой a, вторую буквой b. По условию последняя цифра тоже равна a. Тогда наше число равно
$100a + 10b + a = (98a + 7b) + 3(a + b)$. Первое слагаемое делится на 7. Если второе слагаемое делится на 7, то и само число делится на 7. Обратно, если число делится на 7, то второе слагаемое $3(a + b)$ делится на 7, следовательно, $a + b$ делится на 7.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 104062 Тема: [Турниры и турнирные таблицы]

Сложность: 3
Классы: 6,7,8

Пять футбольных команд провели турнир – каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 3 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Четыре команды набрали соответственно 1, 2, 5 и 7 очков. А сколько очков набрала пятая команда?

Решение

Каждая команда провела 4 игры. Ясно, что первая команда один раз сыграла вничью, а остальные игры проиграла. Вторая имеет две ничьи и два поражения. Третья команда пять очков на одних ничьих набрать не могла, стало быть, она один раз выиграла, кроме того, у неё две ничьи и поражение. Четвёртая команда победила дважды (иначе она набрала бы не более 6 очков). Также у этой команды есть ничья и поражение. В итоге первые четыре команды выиграли 3 раза, а проиграли 7 раз. Однако число побед должно равняться числу поражений. Значит, 4 раза они проиграли пятой команде, и у той 12 очков.

Пример турнира с таким распределением очков: пятая команда выиграла у всех, четвёртая – у первой и второй, третья – у первой, а все остальные игры закончились вничью.

Ответ

12 очков.

Задача 104123 Темы: [Числа Фибоначчи] [Классическая комбинаторика (прочее)] [Правило произведения]

Сложность: 3
Классы: 7,8,9

а) Леша поднимается по лестнице из 10 ступенек. За один раз он прыгает вверх либо на одну ступеньку, либо на две ступеньки. Сколькими способами Леша может подняться по лестнице?
б) При спуске с той же лестницы Леша перепрыгивает через некоторые ступеньки (может даже через все 10). Сколькими способами он может спуститься по этой лестнице?

Классическая задача на числа Фибоначчи

Решение

а) Обозначим через a_n число способов подняться на лестницу из n ступенек, соблюдая условия задачи. Очевидно, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

Пусть Петя запрыгивает на лестницу из $n > 2$ ступенек. Если первый прыжок был на две ступеньки, то ему осталось запрыгнуть на $n - 2$ ступеньки, и число способов закончить подъем равно a_{n-2}. Если же первый прыжок был на одну ступеньку, то число способов закончить подъем равно a_{n-1}. Значит,

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Это равенство позволяет, зная a_1 и a_2, вычислять последовательно все a_n (при этом будут получаться известные *числа Фибоначчи*):

$a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$.

б) Каждую из 9 ступенек (кроме последней) Петя может либо перепрыгнуть, либо не перепрыгнуть независимо от того, на каких из верхних ступенек он останавливался. Поэтому количество способов спуститься по лестнице равно 2^9.

Ответ

а) 89 способов; б) 512 способов.

Задача 105050 Темы: [Деление с остатком] [Теория алгоритмов (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 6,7,8

Автор: Толпыго А.К.

Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов.
Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет?

Решение

Мостик - делимость на 6. Потом идут конструкции и примеры

Поскольку 300 и 198 делятся на 6, Петя сможет снять лишь сумму, кратную 6 долларам. Максимальное число, кратное 6 и не превосходящее 500, – это 498.

Покажем, как снять 498 долларов. Произведём следующие операции: 500 – 300 = 200, 200 + 198 = 398, 398 – 300 = 98, 98 + 198 = 296, 296 + 198 = 494. Сумма, лежащая в банке, уменьшилась на 6 долларов.

Проделав аналогичную процедуру 16 раз, Петя снимет 96 долларов. Затем он может снять 300, положить 198 и снова снять 300. В результате у него будет 498 долларов.

Добавить Прислать комментарий

Задача **105198** Темы: [Числовые таблицы и их свойства]
[Перебор случаев]
[Доказательство от противного]

Сложность: 3
Классы: 6,7,8

В клетках таблицы 3×3 расставлены числа так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке равна нулю. Какое наименьшее количество чисел, отличных от нуля, может быть в этой таблице, если известно, что оно нечётно?

Решение

Логический перебор 3 случаев + конструкции

Пример.

0	–1	1
–1	2	–1
1	–1	0

Оценка. Докажем, что меньшим количеством ненулевых чисел обойтись нельзя.

Если в таблице ровно одно ненулевое число, то сумма чисел в строке, содержащей это число, отлична от нуля.

Допустим, в таблице ровно три ненулевых числа. Если все они стоят в одной строке, то сумма чисел в любом столбце отлична от нуля. Если не все они стоят в одной строке, то в какой-нибудь строке стоит ровно одно ненулевое число, и сумма чисел в этой строке не равна нулю.

Допустим, в таблице ровно пять ненулевых чисел. Тогда в таблице стоит четыре нуля, значит, какие-то два нуля стоят в одной строке. Поскольку сумма чисел в этой строке равна нулю, все числа в этой строке – нули. Осталось заметить, что в столбце, в котором стоит оставшийся ноль, ровно два нуля, что невозможно.

Ответ

7 чисел.

Задача 108732 Темы: [Арифметика остатков (прочее)]
[Инварианты]

Сложность: 3
Классы: 7,8,9

У Ивана-царевича есть два волшебных меча. Первым он может отрубить Змею Горынычу 21 голову. Вторым – 4 головы, но при этом у Змея Горыныча отрастает 2006 голов. Может ли Иван отрубить Змею Горынычу все головы, если в самом начале у него было 100 голов? (Если, например, у Змея Горыныча осталось лишь три головы, то рубить их ни тем, ни другим мечом нельзя.)

Решение

Остаток числа голов Змея Горыныча по модулю 7 не меняется, а вначале этот остаток равен 2.

Ответ

Мостик - остатки по модулю 7

Не сможет.

Задача 108978 Темы: [Десятичная система счисления] [Классическая комбинаторика (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 7,8,9

Найти такое трёхзначное число, удвоив которое, мы получим число, выражающее количество цифр, необходимое для написания всех последовательных целых чисел от единицы до этого искомого трёхзначного числа (включительно).

Решение

Пусть x – искомое число. Однозначных чисел всего 9, двузначных – 90, трёхзначных чисел до x включительно – $x - 99$. Количество цифр, необходимое для написания всех последовательных чисел от 1 до x, равно $9 + 2\cdot 90 + 3\cdot(x - 99) = 3x - 108$. Получим уравнение $2x = 3x - 108$, откуда $x = 108$.

Ответ

108.

Задача 109027 Тема: [Симметрические системы. Инволютивные преобразования]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Найти все действительные решения системы уравнений

$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$
$x^3 + y^3 + z^3 = 1.$

Подсказка

При $0 < |x| < 1$ выполнено неравенство $x^3 < x^2$.

Решение

Если $x \le 1$, то $x^3 \le x^2$, причем равенство достигается только при $x = 0$ и $x = 1$. Из уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ следует, что x, y, z – числа от –1 до 1. Поэтому $x^3 + y^3 + z^3 \le x^2 + y^2 + z^2$, причем равенство достигается, когда каждое из чисел x, y, z равно либо 0, либо 1.

Ответ

{1, 0, 0}.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 109436 Темы: [Количество и сумма делителей числа] [Классическая комбинаторика (прочее)] [Перебор случаев]

Сложность: 3
Классы: 7,8,9

Найдите все нечётные натуральные числа, большие 500, но меньшие 1000, у каждого из которых сумма последних цифр всех делителей (включая 1 и само число) равна 33.

Оптимальный перебор в задачах на делимость

Решение

У нечётного числа все делители – нечётные. Так как сумма их последних цифр нечётна, то делителей должно быть нечётное количество. Если число имеет нечетное количество делителей, то оно является квадратом натурального числа (см. задачу 30365). Рассмотрим все квадраты нечётных чисел, лежащие в указанном промежутке: 23^2, $25^2 = 625$, $27^2 = 729$, 29^2, 31^2. Заметим, что у искомого числа должно быть не менее пяти делителей, иначе сумма их последних цифр не больше 27. Это означает, что из дальнейшего перебора можно исключить квадраты простых чисел 23, 29 и 31, которые имеют ровно три делителя. Тогда остается проверить два числа. Делители числа 625: 1, 5, 25, 125, 625; сумма их последних цифр равна 21. Делители числа 729: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729; сумма их последних цифр равна 33.

Ответ

729.

Задача 109699 Темы: [Десятичная система счисления]
[Ребусы]

Сложность: 3
Классы: 7,8,9

Автор: Волченков С.Г.

В числе A цифры идут в возрастающем порядке (слева направо). Чему равна сумма цифр числа $9\cdot A$?

Решение

Заметим, что $9A=10A-A$. При вычитании этих чисел столбиком ни в одном разряде, кроме младшего, не приходится занимать единицу из следующего разряда. Таким образом, сумма цифр разности равна разности суммы цифр чисел $10A$ и A (которые равны) плюс 9.

Ответ

9.00

Задача 111250 Темы: [Исследование квадратного трехчлена]
[Примеры и контрпримеры. Конструкции]

Сложность: 3
Классы: 8,9

Существуют ли числа такие p и q, что уравнения $x^2 + (p - 1)x + q = 0$ и $x^2 + (p + 1)x + q = 0$ имеют по два различных корня, а уравнение
$x^2 + px + q = 0$ не имеет корней?

Придумайте другие примеры исследовав задачу относительно p,q

Решение

Возьмём, например, $p = 0$, $q = 0,1$. Тогда первые два уравнения имеют одинаковый положительный дискриминант $(D = 1^2 - 4\cdot 0,1 > 0)$, а третье уравнение имеет вид: $x^2 + 0,1 = 0$.

Ответ

Существуют.

Задача 111347 Тема: [Задачи с неравенствами. Разбор случаев]

Сложность: 3
Классы: 7,8,9,10,11

Автор: Галочкин А.И.

На едином экзамене 333 ученика допустили в общей сложности 1000 ошибок.
Возможно ли при этом, что учеников, сделавших более чем по 5 ошибок, оказалось больше, чем учеников, сделавших менее чем по 4 ошибки?

Мат. моделирование

Решение

Пусть x – число школьников, сделавших не более чем по 3 ошибки, y – число школьников, сделавших по 4 или по 5 ошибок, а z – число школьников, сделавших не менее чем по 6 ошибок. Тогда $x + y + z = 333$.
Кроме того, по условию $1000 \geq 4y + 6z \geq 3(x + y + z) + 3(z - x) = 999 + 3(z - x)$. Следовательно, $z - x \leq 0$.

Ответ

Невозможно.

Задача 111353 Темы: [Тождественные преобразования] [Процессы и операции] Сложность: 3 Классы: 10,11

Автор: Гальперин Г.А.

На бумажке записаны три положительных числа x, y и 1. За один ход разрешается записать на бумажку сумму или разность каких-нибудь двух уже записанных чисел или записать число, обратное к какому-нибудь из уже записанных чисел. Можно ли за несколько ходов получить на бумажке

а) число x^2? б) число xy?

Решение

а) Например, так (числа записаны в порядке их появления): ${}^1/_x$, $x+1$, ${}^1/_{x+1}$, ${}^1/_{x^2+x} = {}^1/_x - {}^1/_{x+1}$, x^2+x, x^2.

б) **Первый способ**. Разделим одно из чисел на 2: ${}^1/_y$, ${}^1/_y$, ${}^2/_y$, ${}^y/_2$. Далее, умея возводить в квадрат, за несколько шагов получим число

$(x + {}^y/_2)^2 - x^2 - ({}^y/_2)^2 = xy$.

Второй способ. Получаем число $2xy = (x+y)^2 - x^2 - y^2$, а затем делим его пополам.

Ответ

Можно.

Задача 111644 Темы: [Арифметическая прогрессия] [Комбинаторика (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 8,9

Автор: Произволов В.В.

Даны пятьдесят различных натуральных чисел, двадцать пять из которых не превосходят 50, а остальные больше 50, но не превосходят 100. При этом никакие два из них не отличаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел.

Мостик

Решение

Вычтем 50 из каждого числа, которое больше 50. Получатся 50 разных чисел, то есть числа от 1 до 50. Их сумма равна $1 + 2 + \ldots + 50 = 25\cdot 51$, а сумма исходных чисел – $25\cdot 51 + 25\cdot 50 = 25\cdot 101$.

Ответ

2525.

Задача 115504 Тема: [Исследование квадратного трехчлена]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Автор: Канель-Белов А.Я.

Известно, что сумма любых двух из трёх квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$, $x^2 + ex + f$ не имеет корней. Может ли сумма всех этих трёхчленов иметь корни?

Решение

Обозначим эти трёхчлены через $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$. По условию все их попарные суммы не имеют корней, значит, каждая из функций
$f_1(x) + f_2(x)$, $f_2(x) + f_3(x)$ и $f_3(x) + f_1(x)$ принимает только положительные значения.

Следовательно, $2(f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)) = (f_1(x) + f_2(x)) + (f_2(x) + f_3(x)) + (f_3(x) + f_1(x)) > 0$ для всех x.

Ответ

Не может.

Задача 116005 Тема: [Турниры и турнирные таблицы]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10,11

Автор: Произволов В.В.

В шахматном турнире участвовало 8 человек, и в итоге они набрали разное количество очков (каждый играл с каждым один раз, победа – 1 очко, ничья – 0,5 очка, поражение – 0). Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четверо последних набрали вместе.
Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

Логика

Решение

Занявшие четыре последних места, сыграли друг с другом 6 партий, разделив между собой 6 очков. Поэтому, у шахматиста *B*, занявшего второе место, не может быть менее шести очков.

Докажем, что и более шести очков у него быть не может. Действительно, 6,5 или 7 очков у него может быть только в одном случае: если он выиграл у всех игроков, занявших более низкие места, и не проиграл победителю. Но тогда количество очков победителя турнира будет не больше, чем у *B*.

Следовательно, *B* набрал ровно 6 очков, значит, игроки, занявшие четыре последних места, проиграли все партии игрокам, занявшим места выше них.

Ответ

Выиграл шахматист, занявший третье место.

Задача 116214 Тема: [Числовые неравенства. Сравнения чисел.]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Автор: Федоров Р.М.

Что больше: $2011^{2011} + 2009^{2009}$ или $2011^{2009} + 2009^{2011}$?

a^a+b^b V a^b+b^a

Решение

Преобразуем разность левой и правой частей:

$2011^{2011} + 2009^{2009} - (2011^{2009} + 2009^{2011}) = 2011^{2011} - 2011^{2009} - (2009^{2011} - 2009^{2009}) = 2011^{2009}(2011^2 - 1) - 2009^{2009}(2009^2 - 1).$

Заметим, что $2011^{2009} > 2009^{2009} > 0$ и $2011^2 - 1 > 2009^2 - 1 > 0$. Следовательно, уменьшаемое больше вычитаемого, то есть разность положительна.

Ответ

$2011^{2011} + 2009^{2009} > 2011^{2009} + 2009^{2011}$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 116215 Темы: [Турниры и турнирные таблицы] [Математическая логика (прочее)] [Доказательство от противного]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Автор: Френкин Б.Р.

В турнире каждый участник встретился с каждым из остальных один раз. Каждую встречу судил один арбитр, и все арбитры судили разное количество встреч. Игрок Иванов утверждает, что все его встречи судили разные арбитры. То же самое утверждают о себе игроки Петров и Сидоров. Может ли быть, что никто из них не ошибается?

Решение

Пусть никто из трёх игроков не ошибся. Обозначим количество игроков через n, а количество арбитров через m. Упорядочим арбитров по количеству встреч, которые они судили. Тогда первый арбитр судил не менее одной встречи, второй – не менее двух, ..., последний – не менее m. Следовательно, общее количество встреч не менее $1 + 2 + ... + m$. С другой стороны, общее количество встреч равно $1 + 2 + ... + (n - 1)$. Поэтому $m \leq n - 1$.

Поскольку все $n - 1$ встреч с участием Иванова судили разные арбитры, $m \geq n - 1$. Значит, $m = n - 1$, и все выписанные выше неравенства обязаны быть равенствами, то есть первый арбитр судил ровно одну встречу, второй – ровно две, ..., $(n-1)$-й – ровно $n - 1$.

Рассмотрим арбитра, который судил ровно одну встречу. Поскольку арбитров $n - 1$, а все встречи Иванова судили разные арбитры, этот арбитр судил одну из встреч Иванова. По тем же причинам он судил одну из встреч Петрова, а также Сидорова. Но в единственной встрече, которую он судил, участвовали только два игрока. Противоречие.

Ответ

Не может.

Задача 116227 Тема: [Многочлены (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 10,11

Автор: Косухин О.Н.

Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов $x^{2011} + 2011x - 1$ и $x^{2011} - 2011x + 1$.

Решение

Понимание сути корня многочлена

Пусть $x_1 > 0$ – корень уравнения $x^{2011} + 2011x - 1$, а $x_2 > 0$ – корень уравнения $x^{2011} - 2011x + 1$. Тогда $x_1^{2001} + 2011x_1 - 1 = 0$, $x_2^{2001} - 2001x_2 + 1 = 0$. Складывая эти равенства почленно, получаем $x_1^{2001} + x_2^{2001} + 2001(x_1 - x_2) = 0$. Значит, $x_1 - x_2 = -\dfrac{x_1^{2001} + x_2^{2001}}{2011} < 0$. Таким образом, $x_1 < x_2$.

Ответ

У первого многочлена наименьший положительный корень меньше.

Задача 116389 Тема: [Алгебраические неравенства (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Автор: Гальперин Г.А.

Известно, что $0 < a, b, c, d < 1$ и $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. Докажите, что $(a+b+c+d)-(a+c)(b+d) \geq 1$.

Решение

Логические неравенства

Произведение положительных чисел ac и bd равно произведению положительных чисел $(1-a)(1-c)$ и $(1-b)(1-d)$. Поэтому либо
$ac \geq (1-a)(1-c)$, $bd \leq (1-b)(1-d)$, либо $ac \leq (1-a)(1-c)$, $bd \geq (1-b)(1-d)$.

Разберём первый случай. Раскрыв скобки и приведя подобные, получим $1-(a+c) \leq 0$, $1-(b+d) \geq 0$, следовательно, $1-(a+c)-(b+d)+(a+c)(b+d) = (1-(a+c))(1-(b+d)) \leq 0$. Последнее неравенство равносильно тому, что надо доказать.

Добавить Прислать комментарий

Задача 116435 Темы: [Шахматные доски и шахматные фигуры] [Принцип Дирихле (прочее)] [Доказательство от противного]

Сложность: 3
Классы: 9,10,11

Автор: Фольклор

На шахматной доске расставили n белых и n чёрных ладей так, чтобы ладьи разного цвета не били друг друга. Найдите наибольшее возможное значение n.

Решение

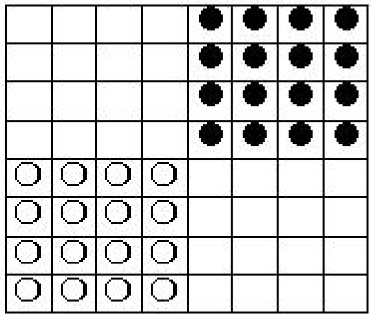
Докажем, что при $n > 16$ осуществить указанную расстановку невозможно. Заметим, что на каждой горизонтали и на каждой вертикали могут располагаться ладьи только одного цвета (либо она может оказаться свободной от ладей). Условимся обозначать горизонталь (вертикаль) тем же цветом, что и цвет ладей, стоящих на ней.

Так как ладей больше 16, то белых горизонталей не меньше трёх.

Если белых горизонталей ровно три, то в одной из них – не менее шести ладей, то есть белых вертикалей не менее шести, а чёрных – не больше двух. Это, как показано выше, невозможно.

Итак, белых горизонталей – не меньше четырёх, значит, черных – не больше четырёх. То же верно и для чёрных вертикалей. Следовательно, чёрных ладей не больше 16. Противоречие.

Пример возможной расстановки при $n = 16$ см. на рисунке.



Ответ

16.

Задача 116492 Тема: [Уравнения в целых числах]

Сложность: 3
Классы: 9,10,11

Докажите, что уравнение $l^2 + m^2 = n^2 + 3$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

Решение

Конструирование серий решений с помощью мостика

Пусть $\boxed{n = m + 1}$, тогда $n^2 - m^2 = (n - m)(n + m) = 2m + 1$, а уравнение примет вид $l^2 - 4 = 2m$.
Положим $l = 2t$, тогда $m = 2t^2 - 2$, $n = 2t^2 - 1$. Мы получили бесконечную серию решений.

Задача 116579 Темы: [Числовые неравенства. Сравнения чисел.] [Доказательство от противного]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Автор: Богданов И.И.

На доске написаны несколько чисел. Известно, что квадрат каждого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

Решение

Предположим, что чисел хотя бы четыре, и a – число с минимальным модулем. Из остальных чисел хотя бы два имеют один знак. Обозначим их b и c; тогда $bc = |bc| \geq |a^2| = a^2$, что противоречит условию.

Пример трёх чисел, удовлетворяющих условию: 1, 2, –3.

Ответ

3 числа.

Задача 116587 Темы: [Числовые неравенства. Сравнения чисел.] [Упорядочивание по возрастанию (убыванию)] [Перебор случаев]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Автор: Голованов А.С.

Даны десять положительных чисел, каждые два из которых различны. Докажите, что среди них найдутся либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь двух из оставшихся, либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь четырёх из оставшихся.

Решение

Логические неравенства, полнота A U B = решение

Возьмём любые пять из данных чисел: a, b, c, d, e. Если $abc > de$, то утверждение верно. Если же $de > abc$, возьмём еще два числа f и g. Пусть, скажем, $f > g$. Тогда $def > abcg$, значит, и в этом случае утверждение верно.

Задача 116630 Тема: [Квадратный трехчлен (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 9,10

Автор: Храбров А.

Приведённый квадратный трёхчлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имеют общий корень. Докажите, что $P(0)P(1) = 0$.

Решение

Понимание сути корня уравнения

Пусть $P(x) = x^2 + px + q$, а t – общий корень данных многочленов. Тогда $P(0)P(1) = q(p + q + 1) = pq + q^2 + q = P(q) = P(P(0)) = P(P(P(t))) = 0$.

Задача 116818 Темы: [Основная теорема арифметики. Разложение на простые сомножители]
[Примеры и контрпримеры. Конструкции]

Сложность: 3
Классы: 8,9

Автор: Жуков Г.

Пусть $C(n)$ – количество различных простых делителей числа n. (Например, $C(10) = 2$, $C(11) = 1$, $C(12) = 2$.)
Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b), что $a \neq b$ и $C(a + b) = C(a) + C(b)$?

Решение

Например, подходят все пары вида $(2^n, 2^{n+1})$. Здесь $C(a) = C(b) = 1$, $C(a + b) = C(3 \cdot 2^n) = 2$.

Ответ

Мостик - степени 2

Бесконечно.

Задача 116934 Тема: [Свойства модуля. Неравенство треугольника]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Автор: Богданов И.И.

По кругу выписаны 1000 чисел. Петя вычислил модули разностей соседних чисел, Вася – модули разностей чисел, стоящих через одно, а Толя – модули разностей чисел, стоящих через два. Известно, что каждое Петино число больше любого Васиного хотя бы вдвое. Докажите, что каждое Толино число не меньше любого Васиного.

Решение

Пусть v – наибольшее из Васиных чисел, а t – какое-то из Толиных (скажем, $t = |a - d|$, где a, b, c, d – четыре выписанных подряд числа). Среди Петиных чисел встречается число $|a - b|$; значит, $|a - b| \geq 2v$. Поэтому $t = |a - d| = |(a - b) + (b - d)| \geq |a - b| - |b - d| \geq 2v - v = v$, что и требовалось доказать.

Задача 116948 Тема: [Квадратные уравнения. Теорема Виета]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Автор: Агаханов Н.Х.

$P(x)$ и $Q(x)$ – приведённые квадратные трёхчлены, имеющие по два различных корня. Оказалось, что сумма двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в трёхчлен $Q(x)$, равна сумме двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в трёхчлен $P(x)$. Докажите, что дискриминанты трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны.

Решение

Пусть a_1 и a_2 – корни трёхчлена $P(x)$, а b_1 и b_2 – корни трёхчлена $Q(x)$.

Первый способ. $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)$, $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2)$. Поэтому $(b_1 - a_1)(b_1 - a_2) + (b_2 - a_1)(b_2 - a_2) = (a_1 - b_1)(a_1 - b_2) + (a_2 - b_1)(a_2 - b_2)$. Перенося все слагаемые в одну часть, получаем $(b_1 - a_1)(b_1 - a_2 + a_1 - b_2) + (b_2 - a_2)(b_2 - a_1 + a_2 - b_1) = 0$, то есть

$(b_1 - b_2)^2 - (a_1 - a_2)^2 = (b_1 + a_2 - a_1 - b_2)\,(a_1 + b_1 - a_2 - b_2) = 0.$

Но $(b_1 - b_2)^2$ и $(a_1 - a_2)^2$ как раз и есть дискриминанты данных трёхчленов.

Второй способ. Пусть $P(x) = x^2 + px + r$, $Q(x) = x^2 + qx + s$. Тогда

$$P(b_1) + P(b_2) = (b_1^2 + b_2^2) + p(b_1 + b_2) + 2r = q^2 - 2s + pq + 2r\,.$$

Аналогично $Q(a_1) + Q(a_2) = p^2 - 2r + pq + 2s$.

По условию $p^2 - 2r + pq + 2s = q^2 - 2s + pq + 2r$, откуда $p^2 - 4r = q^2 - 4s$.

Задача 116951 Темы: [Числовые неравенства. Сравнения чисел.] [Принцип крайнего (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Автор: Подлипский О.К.

Существуют ли такие 2013 различных натуральных чисел, что сумма каждых 2012 из них не меньше квадрата оставшегося?

Решение

Пусть a – наибольшее из данных 2013 различных натуральных чисел. Тогда $a \geq 2013$, поэтому $a^2 \geq 2013a$. Но сумма всех остальных чисел не превосходит $2012a$.

Ответ

Не существуют.

Задача 60289 Тема: [Рекуррентные соотношения]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Числа a_0, a_1,..., a_n,... определены следующим образом:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} \qquad (n \geqslant 2).$$

Найдите и докажите формулу для этих чисел.

Решить самостоятельно

Ответ

$a_n = 2^n + 1$ ($n \geqslant 0$).

Задача 35063 Темы: [Задачи с неравенствами. Разбор случаев]
[Упорядочивание по возрастанию (убыванию)]
[Доказательство от противного]

Сложность: 3
Классы: 8,9

Даны 10 натуральных чисел, не превышающих 91. Докажите, что отношение некоторых двух из этих чисел принадлежит отрезку $[{}^2/_3, {}^3/_2]$.

Понятие всюду плотности

Подсказка

Упорядочите числа по возрастанию. Может ли при этом каждое число превосходить предыдущее более чем в 1,5 раза?

Решение

Предположим, что для некоторых чисел $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{10} \le 91$ утверждение не выполнено. Тогда каждое из чисел (кроме первого) больше предыдущего более, чем в 1,5 раза.

$a_1 \ge 1$ (числа натуральные). Отсюда последовательно получаем: $a_2 > {}^3/_2$, то есть $a_2 \ge 2$; $a_3 > {}^3/_2 \cdot 2 = 3$, то есть $a_3 \ge 4$; $a_4 > 6$, то есть $a_4 \ge 7$;

$a_5 \ge 11$; $a_6 \ge 17$; $a_7 \ge 26$; $a_8 \ge 40$; $a_9 \ge 61$; $a_{10} \ge 92$. Противоречие.

Задача 35213 Тема: [Геометрическая прогрессия]

Сложность: 3
Классы: 9,10,11

Известно, что сумма первых n членов геометрической прогрессии, состоящей из положительных чисел, равна S, а сумма обратных величин первых n членов этой прогрессии равна R. Найдите произведение первых n членов этой прогрессии.

Подсказка

Воспользуйтесь формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии; обратные величины к членам геометрической прогресии также образуют геометрическую прогрессию.

Стандартная задача на геом. прогр. + мат. язык

Решение

Обозначим через a первый член прогрессии, и через q - ее знаменатель. Тогда по формуле суммы первых n членов геометрической прогрессии получаем, что $S=a+aq+aq^2+...+aq^{n-1} = a(q^n-1)/(q-1)$. Обратные величины $1/a$, $1/(aq)$, ... , $1/(aq^{n-1})$ к членам геометрической прогресии также образуют геометрическую прогрессию с первым членом $1/a$ и знаменателем $1/q$. Отсюда $R = 1/a+1/(aq)+1/(aq^2)+...+1/(aq^{n-1}) = 1/a(1/q^n-1)/(1/q-1) = (1/(aq^{n-1}))(q^n-1)/(q-1)$. Из выражений, полученных для S и R, вытекает, что $S/R = a^2q^{(n-1)}$. Произведение первых n членов прогрессии равно $P = a(aq)(aq^2)...(aq^{n-1}) = a^nq^{1+2+...+(n-1)} = a^nq^{n(n-1)/2}$. Возводя равенство $S/R = a^2q^{(n-1)}$ в степень $(n/2)$, получаем, что $(S/R)^{n/2} = a^nq^{n(n-1)/2} = P$.

Ответ

$(S/R)^{n/2}$.

Задача 60862 Тема: [Доказательство тождеств. Преобразования выражений]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Формула сложного радикала. Докажите равенство:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Известная формула, иногда встречается
Попробуйте доказать без возведения в квадрат

Подсказка

Возведите равенство в квадрат.

Задача 61385 Темы: [Классические неравенства (прочее)] [Перестановки и подстановки (прочее)] [Инварианты и полуинварианты]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10,11

Докажите, что если $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$, то наибольшая из сумм вида $a_1b_{k_1} + a_2b_{k_2} + ... + a_nb_{k_n}$ ($k_1, k_2, ..., k_n$ – перестановка чисел
1, 2, ..., n), это сумма $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$, а наименьшая – сумма $a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_nb_1$.

Решение

Известная лемма, часто встречается в других задачах

Заметим, что если $x \geq y$, $z \geq w$, то $xz + yw \geq xw + yz$. Действительно, $(xz + yw) - (xw + yz) = (x - y)(z - w) \geq 0$.

Рассмотрим в сумме $a_1b_{k_1} + a_2b_{k_2} + ... + a_nb_{k_n}$ член a_jb_1, содержащий множитель b_1. Если $j > 1$, то, заменив $a_{j-1}b_{k_{j-1}} + a_jb_1$ на $a_{j-1}b_1 + a_jb_{k_{j-1}}$, мы не уменьшим сумму. Так можно продолжать, пока множитель b_1 не перейдёт в первое слагаемое. Затем поступим так же с множителем b_2 и т. д. В конце концов мы превратим нашу сумму в $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$, не уменьшив её.

Аналогично доказывается, что сумма $a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_nb_1$ – наименьшая.

Задача 30402 Тема: [Арифметика остатков (прочее)]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

x, y, z – натуральные числа, причём $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что xy делится на 12.

Лайфак для пифагоровых троек

Решение

Из решения задачи 30379 следует, что xy делится на 3. Квадрат нечётного числа при делении на 8 даёт остаток 1, квадрат чётного числа, не кратного 4, – остаток 4, квадрат числа, кратного 4, – остаток 0. Поэтому либо x и y оба чётны, либо среди них есть число, кратное 4.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 30600 Темы: [Делимость чисел. Общие свойства] [Симметрия и инволютивные преобразования] Сложность: 3+ Классы: 7,8,9

Назовём натуральное число n *удобным*, если $n^2 + 1$ делится на 1000001. Докажите, что среди чисел 1, 2, ..., 1000000 чётное число удобных.

Подсказка

Если n – удобное число, то и $1000001 - n$ – также удобное.

Решение

$(1000001 - n)^2 + 1 = 1000001(1000001 - 2n) + n^2 + 1$. Поэтому если n – удобное число, то и $1000001 - n$ – также удобное. Осталось проверить, что число 500000 – неудобное. Действительно, $(5\cdot10^5)^2 + 1 = 25\cdot10^{10} + 1 = 25\cdot10^4(10^6 + 1) - (25\cdot10^4 - 1)$, а второе слагаемое меньше $10^6 + 1$.

Задача 30652 Тема: [Уравнения в целых числах]

Сложность: 3+
Классы: 8,9

Базовое линейное уравнение с 3 неизвестными

Решите уравнение $2x + 3y + 3z = 11$ в целых числах.

Решение

Записав уравнение в виде $3(x + y + z) = 11 + x$, видим, что $11 + x$ делится на 3. Поэтому $x = 3k + 1$, $x + y + z = k + 4$, $x + y = k + 4 - z - x = 3 - 2k - z$.

Ответ

$(1 + 3k, 3 - 2k - l, l)$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

Задача 30657 Темы: [Уравнения в целых числах] [Выделение полного квадрата. Суммы квадратов]

Сложность: 3+
Классы: 8,9

Решить в целых числах уравнение $x^2 + y^2 = x + y + 2$.

Понятно, что в целых числах левая часть почти всегда больше правой, а реализация этой идеи может быть различной

Решение

Запишем уравнение в виде $(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 10$.
Отсюда ясно, что одно слагаемое равно 9, а другое – 1.

Ответ

$\{2, 0\}$, $\{2, 1\}$, $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$.

Задача 30667 Тема: [Уравнения в целых числах]

Сложность: 3+
Классы: 8,9

Докажите, что уравнение $1/_x - 1/_y = 1/_n$ имеет единственное решение в натуральных числах тогда и только тогда, когда n – простое число.

Лайфхак для уравнений вида 1/a+-1/b=1/n

Решение

Если $n = pq$ $(p, q > 1)$, то $1/_n = 1/_{n-1} - 1/_{n(n-1)}$ и $1/_n = 1/_{p(q-1)} - 1/_{pq(q-1)}$.

Если же n – простое, то $n(y-x) = xy$, и значит, xy делится на n. Поскольку $x < n$, y делится на n: $y = kn$. Тогда $x = {}^{kn}/_{k+1}$, откуда $k = n-1$, то есть имеется ровно одно решение: $(n-1, n(n-1))$.

Задача 30846 Тема: [Числовые неравенства. Сравнения чисел.]

Сложность: 3+
Классы: 8,9

Докажите, что $2^{100}+3^{100}<4^{100}$.

(n+2)^k>(n+1)^k+n^k почти всегда верно,
поскольку левая часть растет быстрее
в задаче рассматривается частный случай

Решение

Первый способ. $\frac{4^{100}}{2^{100}+3^{100}}>\frac{4^{100}}{2\cdot 3^{100}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{100}>\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{3}=\frac{32}{27}>1$.

Второй способ. Согласно *неравенству Бернулли* (см. задачу 30899) $(^4/_3)^{100}>1+{}^{100}/_3>34>2$, значит, $4^{100}>2\cdot 3^{100}>2^{100}+3^{100}$.

Задача 30873 Тема: [Неравенство Коши]

Сложность: 3+
Классы: 9,10

Докажите, что при $x \ge 0$ имеет место неравенство $3x^3 - 6x^2 + 4 \ge 0$.

Частный случай применения Коши

Решение

$3x^3 + 4 = 2x^3 + x^3 + 4 \ge 3\sqrt[3]{2x^3 \cdot x^3 \cdot 4} = 6x^2$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 30885 Темы: [Алгебраические неравенства (прочее)] [Упорядочивание по возрастанию (убыванию)]

Сложность: 3+
Классы: 8,9

k, l, m – натуральные числа. Докажите, что $2^{k+l} + 2^{k+m} + 2^{l+m} \le 2^{k+l+m+1} + 1$.

Решение

Можно считать, что $\boxed{k \ge l \ge m.}$ Тогда $2^{k+l+m+1} \ge 2^2 \cdot 2^{k+l} > 3 \cdot 2^{k+l} \ge 2^{k+l} + 2^{k+m} + 2^{l+m}$.

Задача 30949 Тема: [Четность и нечетность]

Сложность: 3+
Классы: 6,7,8

По окружности стоят 239 точек двух цветов. Доказать, что найдутся две точки одного цвета, разделённые ровно двумя точками.

Решение

Оставим на окружности только каждую третью точку, остальные сотрём. Останется 237 : 3 = 79 точек). Поскольку 79 – нечётное число, то чередоваться цвета не могут. Значит, теперь найдутся две точки одного цвета, которые стоят рядом. Но раньше они были разделены двумя точками.

Сложность: 3+
Классы: 6,7,8

Задача 31236 Тема: [Арифметика остатков (прочее)]

На сколько нулей оканчивается число $999^{999} + 1$?

Стандартная задача на определение остатка выражения n^(2k+1)+1 путем разложения на две скобки и рассмотрения остатка второй скобки

Решение

$9^{999} + 1 = (9 + 1)(9^{998} - 9^{997} + ... - 9 + 1)$, $9^{998} - 9^{997} + ... - 9 + 1 \equiv (-1)^{998} - (-1)^{997} + ... - (-1) + 1 = 999 \pmod{10}$. Значит, $9^{999} + 1$ делится на 10, но не делится на 100.

Ответ

На один.

Задача 61138

Тема: [Арифметика остатков (прочее)]

Сложность: 3+
Классы: 10,11

Добавить
Прислать комментарий

Делимость многочленов через остатки

Условие

Докажите, что при любых целых a и натуральном n выражение $(a+1)^{2n+1}+a^{n+2}$ делится на a^2+a+1.

Решение

Пусть $b=a^2+a+1$. Заметим, что $a+1\equiv -a^2 \pmod b$, $a^3\equiv 1 \pmod b$. Поэтому $(a+1)^{2n+1}+a^{n+2}\equiv -a^{4n+2}+a^{n+2}\equiv -a^{n+2}+a^{n+2}\equiv 0 \pmod b$, что и требовалось.

Задача 31307 Тема: [Разложение на множители]

Сложность: 3+
Классы: 6,7,8

Разложить на множители выражение $x^3 + y^3 + z^3 - xyz$.

Решение

Известное тождество, выведите его самостоятельно, слева направо

См. задачу 61005 г).

Ответ

$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 31308 Тема: [Уравнения в целых числах]

Сложность: 3+
Классы: 6,7,8

a – фиксированное натуральное число. Доказать, что уравнение $x! = y^2 + a^2$ имеет лишь конечное число решений в натуральных числах.

Базовое уравнение в целых числах с факториалом

Решение

При $x \geq a^2 + 4$ $x!$, а значит, и y^2 делится на a^2, то есть $y = ka$. Тогда $(a^2 - 1)!(a^2 + 1)...(a^2 + 4)...x = 1 + k^2$. Но левая часть делится на 4, а правая – не делится. Значит, x может принимать только конечное число значений.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 32887 Тема: [Арифметика остатков (прочее)]

Сложность: 3+
Классы: 7,8,9

Автор: Френкин Б.Р.

На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

Мостик - остатки

Решение

Если бы школьников было 11 и они решили разное количество задач, то были бы реализованы все возможные варианты (от 0 до 10 задач) и всего было бы решено $0 + 1 + ... + 10 = 55$ задач. Так как школьников десять, то отсутствует один из вариантов, и количество решений равно $55 - x$, где x – целое число от 0 до 10.

Поскольку каждая из 10 задач решена одинаковым количеством школьников, количество решений всех задач кратно 10. Поэтому $x = 5$, то есть нет школьника, решившего ровно 5 задач. Так как Боря решил задачи с первой по пятую, он решил еще хотя бы одну задачу, и это может быть только десятая.

Ответ

Решил.

Задача 34836 Темы: [Уравнения в целых числах] [Арифметика остатков (прочее)] [Разложение на множители]

Сложность: 3+
Классы: 8,9

Решите в натуральных числах уравнение $3^x + 4^y = 5^z$.

Подсказка

Рассмотрите остатки от деления на 3 и 4, используйте формулу разности квадратов.

Решение

Классическая задача на степенные уравнения

Правая часть при делении на 3 должна давать тот же остаток, что и левая, то есть 1. Поэтому z чётно. Аналогично левая часть делится на 4 с остатком 1, поэтому x тоже чётно. Итак, $4^y = 5^z - 3^x = 5^{2u} - 3^{2v}$, то есть $2^{2y} = (5^u - 3^v)(5^u + 3^v)$. Обе скобки справа являются степенями двойки. Пусть $5^u - 3^v = 2^k$ и
$5^u + 3^v = 2^l$, где $k, l \geq 0$ и $k + l = 2y$. Тогда $5^u = ½\,(2^k + 2^l)$ и $3^v = ½\,(2^l - 2^k)$. Поэтому $l > k$, значит, 2^l делится на 4, а 2^k – не делится, то есть $k = 1$, $2^k = 2$
и $3^v = 2^{l-1} - 1$. Отсюда следует, что число $l - 1$ чётно, $l - 1 = 2s$. Тогда $3^v = (2^s - 1)(2^s + 1)$ – произведение двух чисел, отличающихся на 2 и являющихся степенями тройки. Следовательно, эти множители – 1 и 3. Значит, $s = 1$, $l = 3$, $2y = 4$.

Ответ

(2, 2, 2).

Задача [35029] Тема: [Десятичная система счисления]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

Подряд выписаны числа 2^{2000} и 5^{2000}. Сколько всего выписано цифр?

Подсказка

Мостик = 10

Если число 2^{2000} содержит m цифр, то $10^{m-1}<2^{2000}<10^m$.

Решение

Пусть число 2^{2000} содержит m цифр, а число 5^{2000} содержит n цифр. Тогда справедливы неравенства: $10^{m-1}<2^{2000}<10^m$, $10^{n-1}<5^{2000}<10^n$ (неравенства строгие, поскольку степень двойки или пятерки не равна степени десятки). Перемножив эти неравенства, получаем: $10^{m+n-2}<10^{2000}<10^{m+n}$. Отсюда следует, что показатель 2000 заключен между m+n-2 и m+n, поэтому 2000=m+n-1 и m+n=2001. Это означает, что всего выписана 2001 цифра.

Ответ

2001.00

Задача 35122 Темы: [Простые числа и их свойства] [Доказательство от противного]

Сложность: 3+
Классы: 7,8,9

Докажите, что простых чисел, дающих остаток 2 при делении на 3, бесконечно много.

Подсказка

Если имеются простые числа $p_1, p_2, ..., p_n$, то все простые делители чисел $p_1p_2...p_n + 1$ и $p_1p_2...p_n - 1$ отличны от чисел $p_1, p_2, ..., p_n$.

Усложнение док-ва бесконечности простых чисел

Решение

Предположим, что напротив, найдётся лишь конечное число таких простых чисел, обозначим эти числа $p_1, p_2, ..., p_n$. Число $A = 3p_1p_2...p_n - 1$ не делится на простые числа $p_1, p_2, ..., p_n$ и даёт остаток 2 при делении на 3. Значит, среди его простых делителей должно быть число вида $3k + 2$. Противоречие.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 35231 Темы: [Свойства коэффициентов многочлена]
[Сочетания и размещения]
[Раскладки и разбиения]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

Вычислите коэффициент при x^{100} в многочлене $(1 + x + x^2 + ... + x^{100})^3$ после приведения всех подобных членов.

Подсказка

Коэффициент при x^{100} равен числу решений уравнения $p + q + r = 100$ в целых неотрицательных числах.

Решение

Коэффициенты многчленов при раскладывании скобок

Умножая многочлен $1 + x + x^2 + ... + x^{100}$ два раза сам на себя, мы получим сумму одночленов вида $x^px^qx^r$, где p, q, r пробегают независимо числа от 0 до 100. Значит, коэффициент при x^{100} равен числу решений уравнения $p + q + r = 100$ в целых неотрицательных числах. Это число, в свою очередь, равно числу способов разложить 100 шаров по трём ящикам. См. задачи 30717 б) и 60406 б).

Ответ

$C_{102}^2 = 5151.$

Задача 35233 Тема: [Обыкновенные дроби]

Сложность: 3+
Классы: 9,10

Числа a, b, p, q, r, s – натуральные, причём $p/q < a/b < r/s$ и $qr - ps = 1$. Докажите, что $b \geq q + s$.

Задача "соседних" дробей

Подсказка

Для оценки знаменателя b используйте положительность величин $aq - bp$ и $br - as$.

Решение

Числитель разности $a/b - p/q$, равный $aq - bp$ положителен, а значит, не меньше 1. Аналогично, $br - as \geq 1$. Следовательно, $b = b(qr - ps) = s(aq - bp) + q(br - as) \geq s + q$.

Задача [35251] Тема: [Алгебра и арифметика (прочее)]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

Существуют ли натуральные числа m и n такие, что m^2+n и n^2+m одновременно являются квадратами?

Подсказка

Если $m>n$, то m^2+n слишком близко к m^2.

Задача на расстояние между соседними точными квадратами

Решение

Пусть для определенности m не меньше, чем n. Предположим, что m^2+n является точным квадратом, т.е. $m^2+n=k^2$ для некоторого натурального k. Тогда, очевидно, $k>m$. Запишем $(m+1)^2=m^2+2m+1>m^2+n=k^2$. Отсюда следует, что $m+1>k$. Таким образом, $m<k<m+1$. Это противоречит тому, что k- натуральное число, таким образом, m^2+n не является точным квадратом.

Ответ

не существуют.

Задача 35666 Тема: [Четность и нечетность]

Сложность: 3+
Классы: 8,9

Дети перебрасываются красными, белыми и синими мячами. Каждый ребенок бросил и поймал в сумме три мяча, причём это мячи различных цветов. Кроме того, некоторые три мяча были брошены, но никем не пойманы. Докажите, что эти три мяча – трёх различных цветов.

Подсказка

Покажите, что число брошенных, но не пойманных мячей каждого цвета имеет одну и ту же чётность.

Решение

Пусть количество детей равно k, а количество брошенных, но не пойманных красных мячей равно m. Тогда количество брошенных и пойманных красных мячей равно ½ $(k-m)$ (так как каждый из этих мячей один из детей бросил, а другой – поймал). Таким образом, k и m одной чётности. Аналогично число брошенных, но не пойманных мячей каждого цвета имеет чётность, совпадающую с чётностью k. Сумма этих трёх чисел равна 3. Поскольку они неотрицательны, то все они равны 1.

Задача [60474] Тема: [Простые числа и их свойства]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

Пусть $\{p_n\}$ – последовательность простых чисел ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ...).

а) Докажите, что $p_n > 2n$ при $n \geq 5$.

б) При каких n будет выполняться неравенство $p_n > 3n$?

Решение

Неравенства, связывающие простые числа и обычные

а) Поскольку все простые числа, кроме 2, нечётны, то $p_n \geq p_5 + 2(n - 5) = 2n + 1$ при $n \geq 5$.

б) Все простые числа, начиная с 7, имеют вид $6n + 1$ или $6n + 5$. Поскольку $p_{12} = 37 = 6 \cdot 6 + 1$, то $p_{12+2n} \geq 6(6 + n) + 1 > 3(12 + 2n)$, а
$p_{12+2n+1} \geq 6(6 + n) + 5 > 3(12 + 2n + 1)$.

При $n < 12$, как легко проверить, неравенство не выполнено.

Ответ

б) При $n \geq 12$.

Задача 60475 Тема: [Простые числа и их свойства]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

Докажите неравенство $p_{n+1} < p_1p_2...p_n$ (p_k – k-е простое число).

Неравенства с простыми числами

Подсказка

Рассмотрите число $p_1p_2...p_n - 1$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 60492 Тема: [НОД и НОК. Взаимная простота]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель чисел a и b, если известно, что $ab = 600$?

Подсказка

Полезная лемма, доказать

Произведение двух чисел делится на квадрат их наибольшего общего делителя.

Ответ

10.

Задача 60561 Тема: [Числа Фибоначчи]

Сложность: 3+
Классы: 8,9

О том, как прыгают кузнечики. Предположим, что имеется лента, разбитая на клетки и уходящая вправо до бесконечности. На первой клетке этой ленты сидит кузнечик. Из любой клетки кузнечик может перепрыгнуть либо на одну, либо на две клетки вправо. Сколькими способами кузнечик может добраться до n-ой от начала ленты клетки?

Решение

Еще раз про Фибоначчи

Пусть a_n — количество способов, которыми кузнечик может добраться до n-ой клетки. Тогда $a_1 = a_2 = 1$. Кроме того, в $n + 1$-ую клетку кузнечик может попасть либо из n-ой клетки, либо перепрыгнув n-ую клетку. Поэтому $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$. Отсюда $a_n = F_{n-1}$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 60565 Темы: [Числа Фибоначчи] [Индукция (прочее)]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10,11

Докажите следующие свойства чисел Фибоначчи:

а) $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$; в) $F_2 + F_4 + ... + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$;

Еще раз про Фибоначчи, несколько лайфхаков

б) $F_1 + F_3 + ... + F_{2n-1} = F_{2n}$; г) $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_nF_{n+1}$.

Подсказка

Все равенства доказываются при помощи метода математической индукции.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 60679 Тема: [Арифметика остатков (прочее)]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10,11

Когда сравнения $a \equiv b \pmod{m}$ и $ac \equiv bc \pmod{m}$ равносильны?

Тренируем технику по остаткам

Ответ

При $(m, c) = 1$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 60685 Тема: [Деление с остатком]

Сложность: 3+
Классы: 7,8,9

Составьте список всевозможных остатков, которые дают числа n^2 при делении на 3, 4, 5, ..., 9.

Ответ

При делении на 3 и на 4 0 и 1; при делении на 5 и на 8 0, 1 и 4; при делении на 6 0, 1, 3 и 4; при делении на 7 0, 1, 2 и 4; при делении на 9 0, 1, 4 и 7.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 60689 Тема: [Арифметика остатков (прочее)]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

Найдите остатки от деления числа 2^{2001} на 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17.

Решение

$2^3 \equiv -1 \pmod 9$, значит, $2^{2001} = (2^3)^{667} \equiv -1 \pmod 9$.
$2^4 \equiv 1 \pmod{15}$, значит, $2^{2001} = 2\cdot(2^4)^{500} \equiv 2 \pmod{15}$.
$2^3 \equiv 1 \pmod 7$, значит, $2^{2001} = (2^3)^{667} \equiv 1 \pmod 7$.
$2^5 \equiv -1 \pmod{11}$, значит, $2^{2001} = 2\cdot(2^5)^{400} \equiv 2 \pmod{11}$.
$2^6 \equiv -1 \pmod{13}$, значит, $2^{2001} = 8\cdot(2^6)^{333} \equiv 5 \pmod{13}$.
$2^4 \equiv -1 \pmod{17}$, значит, $2^{2001} = 2\cdot(2^4)^{500} \equiv 2 \pmod{17}$.

Ответ

2, 2, 1, 8, 2, 5, 2, 2.

Добавить Прислать комментарий

Задача 60706 Тема: [Арифметика остатков (прочее)]

Сложность: 3+
Классы: 9,10,11

Найдите все такие целые числа x, что $x \equiv 3 \pmod 7$, $x^2 \equiv 44 \pmod{7^2}$, $x^3 \equiv 111 \pmod{7^3}$.

Решение

$x = 7m + 3$, $x^2 \equiv 49m^2 + 42m + 9 \equiv 42m + 9 \equiv 44 \pmod{7^2}$, значит, $6m \equiv 5 \equiv 12 \pmod 7$, то есть $m \equiv 2 \pmod 7$. $x = 7(7n + 2) + 3 = 49n + 17$.
$x^3 \equiv 3\cdot17\cdot49n + 17^3 \equiv 111 \pmod{7^3}$, значит, $51n \equiv 0 \pmod 7$, то есть $n = 7k$.

Ответ

$x \equiv 17 \pmod{343}$.

Темы: [НОД и НОК. Взаимная простота] [Алгоритм Евклида] [Индукция (прочее)]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10
Название задачи: Алгоритм Евклида.

Добавить
Прислать комментарий

Условие

а) Пусть m_0 и m_1 – целые числа, $0 < m_1 \le m_0$. Докажите, что при некотором $k > 1$ существуют такие целые числа $a_0, a_1, ..., a_k$ и $m_2, ..., m_k$, что

$m_1 > m_2 > m_3 > ... > m_k > 0$, $a_k > 1$,

$m_0 = m_1a_0 + m_2$,

$m_1 = m_2a_1 + m_3$,

$m_2 = m_3a_2 + m_4$,

...

$m_{k-2} = m_{k-1}a_{k-1} + m_k$,

$m_{k-1} = m_ka_k$,

и $(m_0, m_1) = m_k$.

Очень полезная лемма, часто используется для d=1

б) Докажите, что для любого s от $k-1$ до 0 существуют такие числа u_s, v_s, что $m_su_s + m_{s+1}v_s = d$, где $d = (m_0, m_1)$.

В частности, для некоторых u и v выполняется равенство $m_0u + m_1v = d$.

Решение

а) Числа a_0 и m_2 получаются как частное и остаток при делении m_0 на m_1 числа a_1 и m_2 – как частное и остаток при делении m_1 на m_2, и так далее. Поскольку числа все время уменьшаются, процесс когда-нибудь закончится, то есть на каком-то шаге остаток будет равен нулю.

б) Обратная индукция по k.

База. $m_{k-1} = m_ka_k = (a_k - 1)m_k + m_k = (a_k - 1)m_k + d$, то есть $u_{k-1} = 1$, $v_{k-1} = a_k - 1$.

Шаг индукции. Пусть $d = m_su_s + m_{s+1}v_s$. Тогда $d = m_su_s + (m_{s-1} - m_sa_s)v_s = m_{s-1}v_s + m_s(u_s - a_sv_s)$.

Задача 60729 Тема: [Китайская теорема об остатках]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

Докажите что если $(m, n) = 1$, то сравнение $a \equiv b \pmod{mn}$ равносильно одновременному выполнению двух сравнений $a \equiv b \pmod{m}$ и $a \equiv b \pmod{n}$.

Подсказка

Начало Китайской Т. об остатках

Воспользуйтесь задачей 60490.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 60733 Тема: [Арифметика остатков (прочее)]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10,11

Пусть числа $x_1, x_2, \dots, x_m$ образуют полную систему вычетов по модулю m. Для каких a и b числа $y_j = ax_j + b$ $(j = 1, \dots, m)$ также образуют полную систему вычетов по модулю m?

Понятие полной системы вычетов

Ответ

При $(a, m) = 1$.

Задача 60752

Темы: [Простые числа и их свойства] [Малая теорема Ферма] [Арифметика остатков (прочее)]

Сложность: 4-
Классы: 8,9,10

Добавить
Прислать комментарий

Мега-полезная лемма

Условие

Докажите, что если $x^2 + 1$ (x – целое) делится на нечётное простое p, то $p = 4k + 1$.

Решение

Ясно, что x не делится на p. По *малой теореме Ферма* $1 \equiv x^{p-1} = (x^2)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{(p-1)/2} \pmod p$. Следовательно, число $^{p-1}/_2$ чётно, что и требовалось.

Задача 60753 Темы: [Простые числа и их свойства] [Доказательство от противного]

Сложность: 3+
Классы: 9,10

При помощи задачи 60752 докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $p = 4k + 1$.

Решение

Применение леммы для простых чисел

Пусть таких чисел всего n: $p_1, ..., p_n$. Рассмотрим число $(2p_1...p_n)^2 + 1$. Согласно задаче 60752 у него есть простой множитель вида $p = 4k + 1$. С другой стороны, это число не делится ни на одно из чисел $p_1, ..., p_n$. Противоречие.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 60970 Тема: [Теорема Безу. Разложение на множители]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

Докажите, что многочлен $P(x) = (x + 1)^6 - x^6 - 2x - 1$ делится на $x(x + 1)(2x + 1)$.

Подсказка

Понимание сути делимости многочлена на линейный двучлен

Достаточно проверить, что $P(0) = P(-1) = P(-\tfrac{1}{2}) = 0$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 60975 Тема: [Свойства коэффициентов многочлена]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

Пусть $P(x) = (2x^2 - 2x + 1)^{17}(3x^2 - 3x + 1)^{17}$. Найдите
а) сумму коэффициентов этого многочлена;
б) суммы коэффициентов при чётных и нечётных степенях x.

Решение

Сумма коэффициентов равна $P(1) = 1$. Сумма коэффициентов при чётных степенях равна $½\,(P(1) + P(-1)) = ½\,(1 + 5^{17}7^{17})$.
Соответственно сумма коэффициентов при нечётных степенях равна $½\,(P(1) - P(-1)) = ½\,(1 - 5^{17}7^{17})$.

Ответ

а) 1; б) $½\,(1 + 35^{17})$, $½\,(1 - 35^{17})$.

Задача 60976 Темы: [Теорема Безу. Разложение на множители]
[Методы решения задач с параметром]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

При каких a и b многочлен $P(x) = (a + b)x^5 + abx^2 + 1$ делится на $x^2 - 3x + 2$?

Снова про деление многочленов на линейные многочлены

Решение

$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. Поэтому должны выполняться равенства $P(1) = P(2) = 0$, то есть $(a + b) + ab + 1 = (a + 1)(b + 1) = 0$, $32(a + b) + 4ab + 1 = 0$. Из первого равенства видим, что одно из чисел a, b равно -1. Подставляя во второе равенство, находим, что второе число равно $^{31}/_{28}$.

Ответ

$\{a, b\} = \{-1, {}^{31}/_{28}\}$.

Задача 61008 Тема: [Разложение на множители]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

Упростите выражение: $\dfrac{(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5}{(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3}$.

Тренируем технику упрощений и разложений с помощью Безу

Решение

$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(a+c)(b+c)$ (см задачу 61005 ж). Разложим на множители числитель.

Первый способ. $(a+b)^5-a^5-b^5=5ab(a^3+b^3)+10a^2b^2(a+b)=5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$. Поэтому

$$(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5=(a+b+c)^5-(a+b)^5-c^5+(a+b)^5-a^5-b^5=$$
$$=5c(a+b)(a+b+c)((a+b)^2+(a+b)c+c^2)+5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)=$$
$$=5(a+b)(c(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+ac+bc)+ab(a^2+ab+b^2))=$$
$$=5(a+b)(c(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)+abc(a+b+c)+ab(a^2+ab+b^2))=$$
$$=5(a+b)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)\cdot(c(a+b+c)+ab)=5(a+b)(b+c)(a+c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc).$$

Второй способ. По теореме Безу (см. задачу 60961) многочлен в числителе делится на $a+b$, $a+c$ и $b+c$, а значит, и на их произведение. В частном должен получиться симметрический многочлен второй степени, то есть вида $p(a^2+b^2+c^2)+q(ab+ac+bc)$. Подставляя вместо (a, b, c) $(1, 1, 0)$ и $(2, -1, 0)$, найдем, что $p=q=5$.

(Можно также в равенстве $(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5=(a+b)(b+c)(a+c)(p(a^2+b^2+c^2)+q(ab+ac+bc))$ сравнить коэффициенты при a^4b и a^3b^2.)

Итак, $\dfrac{(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5}{(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3}=\dfrac{5(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)}{3}$.

Ответ

$\dfrac{5(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)}{3}$.

Задача 61018 Темы: [Теорема Безу. Разложение на множители] [Производная и кратные корни]

Сложность: 3+
Классы: 10,11

Докажите, что корень a многочлена $P(x)$ имеет кратность больше 1 тогда и только тогда, когда $P(a) = 0$ и $P'(a) = 0$.

Решение

Базовая лемма про кратные корни

Поскольку a – корень, то $P(x) = (x-a)^2Q(x) + p(x-a)$. Корень имеет кратность больше единицы тогда и только тогда, когда $p = 0$. Осталось проверить, что $P'(a) = p$. Это видно из формулы $P'(x) = (x-a)2Q'(x) + 2(x-a)Q(x) + p$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 61050

Тема: [Интерполяционный многочлен Лагранжа]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Добавить
Прислать комментарий

Условие

Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ – действительные числа. Постройте многочлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ степени $n-1$, которые удовлетворяют условиям $f_i(x_i) = 1$ и $f_i(x_j) = 0$ при $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Потренировать формулу на многочленах малых степеней

Ответ

$$f_i(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

Задача 61052

Тема: [Многочлен n-й степени имеет не более n корней]

Сложность: 4-
Классы: 8,9,10

Добавить
Прислать комментарий

Условие

Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ – действительные числа. Докажите, что для любых $y_1, y_2, \ldots, y_n$ существует единственнный многочлен $f(x)$ степени не выше $n-1$, такой, что $f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$.

Потренировать формулу на многочленах малых степеней

Решение

$f(x) = y_1f_1(x) + \ldots + y_nf_n(x)$, где многочлены $f_i(x)$ построены в задаче 61050. Если таких многочленов два, то их разность будет многочленом степени не выше $n-1$ с n корнями, то есть тождественно равна нулю.

Задача 61055 Тема: [Интерполяционный многочлен Лагранжа]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

Постройте многочлены $f(x)$ степени не выше 2, которые удовлетворяют условиям:

а) $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 3$;

б) $f(-1) = -1$, $f(0) = 2$, $f(1) = 5$;

в) $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 4$.

Решение

а) По формуле из задачи 61052 (или 61053)

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2} - 3\,\frac{x(x-2)}{1\cdot 1} + 3\,\frac{x(x-1)}{2\cdot 1} = -x^2 + 3x + 1\,.$$

б) $$f(x) = -\frac{x(x-1)}{1\cdot 2} - 2\,\frac{(x+1)(x-1)}{1\cdot 1} + 5\,\frac{(x+1)x}{2\cdot 1} = 3x + 2\,.$$

в) $$f(x) = \frac{x(x-2)}{1\cdot 3} + 4\,\frac{(x+1)x}{3\cdot 2} = x^2\,.$$

Ответ

а) $-x^2 + 3x + 1$; б) $3x + 2$; в) x^2.

Задача 61255 Тема: [Кубические многочлены]

Сложность: 3+
Классы: 9,10,11

Лайфхак

Докажите равенство $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$.

Решение

Обозначим $u = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, $v = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Тогда $u^3 + v^3 = 4$, $uv = \sqrt[3]{4-5} = -1$. Из равенства $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$ видно, что $u+v$ – корень уравнения $x^3 + 3x - 4 = 0$. Это уравнение имеет очевидный корень $x = 1$, а других корней у него нет (см. задачу 61252 а).

Добавить

Прислать комментарий

Задача 61396 Темы: [Алгебраические неравенства (прочее)] [Индукция (прочее)]

Сложность: 3+
Классы: 10,11

Докажите, что для любых натуральных m и n хотя бы одно из чисел $\sqrt[m]{n}$, $\sqrt[n]{m}$ не больше $\sqrt[3]{3}$.

Неравенства в целых числах

Решение

Если $n \geq m$, то $\sqrt[m]{n} \leq \sqrt[n]{n}$. Поэтому достаточно доказать, что $\sqrt[m]{n} \leq \sqrt[n]{n}$. то есть что $3^n \geq n^3$. Докажем это по индукции.

База: $3^1 > 1^3$, $3^2 > 2^3$, $3^3 = 3^3$.

Шаг индукции. $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \geq 3n^3 > (n+1)^3$, поскольку $\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \leq \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} < 3$ при $n \geq 3$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 64348 Тема: [Суммы числовых последовательностей и ряды разностей]

Сложность: 3+
Классы: 9,10

Автор: Грибалко А.В.

По кругу расставлено $2n$ действительных чисел, сумма которых положительна. Для каждого из них рассмотрим обе группы из n подряд стоящих чисел, в которых это число является крайним. Докажите, что найдётся число, для которого сумма чисел в каждой из двух таких групп положительна.

Формализация задачи, мат. язык, A U B = решение

Решение

Данные числа занумеруем в порядке обхода по часовой стрелке: $a_1, a_2, ..., a_{2n}$; обозначим через $S > 0$ сумму всех чисел и положим $S_i = a_i + a_{i+1} + ... + a_{i+n-1}$ (все индексы рассматриваются по модулю $2n$, так что $a_{2n+i} = a_i$ и $S_{2n+i} = S_i$). Нам надо доказать, что при некотором i обе суммы S_i и S_{i-n+1} положительны. Заметим, что $S_i + S_{n+i} = S > 0$, так что среди чисел S_i есть положительные.

Если все суммы S_i положительны, то любой индекс i подходит. В противном случае найдётся такой индекс i, что $S_i > 0$, а $S_{i+1} \le 0$. Тогда
$S_{i-n+1} = S - S_{i+1} > 0$, и индекс i – искомый.

Задача 64442 Тема: [НОД и НОК. Взаимная простота]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

Автор: Френкин Б.Р.

Наибольший общий делитель натуральных чисел a, b будем обозначать (a, b). Пусть натуральное число n таково, что $(n, n+1) < (n, n+2) < \ldots < (n, n+35)$. Докажите, что $(n, n+35) < (n, n+36)$.

Решение

Мостик

Заметим, что $\boxed{(n, n+k) = (n, k) \leq k}$, то есть $(n, n+1) \leq 1$, $(n, n+2) \leq 2$, ..., $(n, n+35) \leq 35$. Поэтому неравенства из условия задачи могут выполняться тогда и только тогда, когда $(n, n+1) = 1$, $(n, n+2) = 2$, ..., $(n, n+35) = 35$. Но тогда $(n, n+4) = 4$, $(n, n+9) = 9$, то есть n делится на $4 \cdot 9 = 36$, откуда
$(n, n+36) = 36 > 35 = (n, n+35)$.

Задача 64548 Темы: [Квадратичные неравенства (несколько переменных)] [Монотонность, ограниченность] Сложность: 3+

Найдите наибольшее значение выражения $a + b + c + d - ab - bc - cd - da$, если каждое из чисел a, b, c и d принадлежит отрезку $[0, 1]$.

Решение

Исследование неравенств, база

Заметим, что $a + b + c + d - ab - bc - cd - da = (a + c) + (b + d) - (a + c)(b + d)$. Пусть $a + c = x$, $b + d = y$, $0 \le x \le 2$ и $0 \le y \le 2$.
$x + y - xy = (x - 1)(1 - y) + 1$, где $|x - 1| \le 1$ и $|1 - y| \le 1$. Следовательно, $(x - 1)(1 - y) \le 1$, а $x + y - xy \le 2$.
Значение 2 достигается, например, если $a = c = 1$, $b = d = 0$.

Ответ

2.

Задача 64769 Темы: [Делимость чисел. Общие свойства] [Доказательство от противного]

Сложность: 3+
Классы: 9,10,11

Автор: Подлипский О.К.

Назовём натуральное число *хорошим*, если среди его делителей есть ровно два простых числа.
Могут ли 18 подряд идущих натуральных чисел быть хорошими?

Мостик

Решение

Предположим, что нашлись 18 хороших чисел подряд. Среди них найдутся три числа, делящихся на 6. Пусть это числа $6n$, $6(n+1)$ и $6(n+2)$. Поскольку эти числа – хорошие, и в разложение каждого из них на простые множители входят двойка и тройка, других простых делителей у них быть не может.

Лишь одно из трёх подряд идущих натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$ может делиться на 3. Значит, остальные два являются степенями двойки. Но пары степеней двойки, отличающихся не более чем на два, – это только $(1, 2)$ и $(2, 4)$; поэтому $n \le 2$. Однако тогда среди наших 18 чисел есть простое число 13 (так как $6n \le 13 \le 6(n+2)$), не являющееся хорошим. Противоречие.

Ответ

Не могут.

Задача 64831 Тема: [Неравенство Коши]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

Докажите, что для положительных значений a, b и c выполняется неравенство $\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Решение

Согласно *неравенству Коши* $\frac{a+b}{a^2+b^2} \le \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. Записав аналогичные неравенства для второго и третьего слагаемых в левой части, получим доказываемое неравенство.

Задача 64996 Темы: [Средние величины] [Примеры и контрпримеры. Конструкции]

Сложность: 3+
Классы: 7,8,9

Набор из нескольких чисел, среди которых нет одинаковых, обладает следующим свойством: среднее арифметическое каких-то двух чисел из этого набора равно среднему арифметическому каких-то трёх чисел из набора и равно среднему арифметическому каких-то четырёх чисел из набора. Каково наименьшее возможное количество чисел в таком наборе?

Решение

Формализуем задачу, мат. язык. Мостик

Пусть $C(a_1, ..., a_k)$ – среднее арифметическое чисел $(a_1, ..., a_k)$. Заметим, что добавление к набору числа, отличного от его среднего арифметического, меняет исходное среднее арифметическое набора.

Предположим, что (a, b, c, d) – удовлетворяющий условию набор из четырёх чисел, и $C(a, b, c, d) = C(a, b, c) = C$. Тогда $d = C$.

Набор из двух *разных* числа с тем же средним арифметическим не может содержать число d. Если же это, например, числа a и b, то $c = C = d$, что противоречит условию.

Следовательно, удовлетворяющего условию набора из четырёх чисел не существует.

Пример набора из пяти чисел: 1, 2, 3, 4, 5. Действительно, $C(2, 4) = C(2, 3, 4) = C(1, 2, 4, 5) = 3$.

Ответ

5 чисел.

Задача 65071 Темы: [Основная теорема арифметики. Разложение на простые сомножители]
[Доказательство от противного]

Сложность: 3+
Классы: 8,9

Автор: Кожевников П.А.

Даны натуральные числа a и b, причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

Мостик

Решение

Предположим, что найдётся простое число p, входящее в разложение числа a^2 на простые множители с показателем меньшим, чем в разложение числа b. То есть, если a делится на p^k, но не делится на p^{k+1}, а b делится на p^m, но не делится на p^{m+1}, то $m > 2k$, а значит, $m \geq 2k + 1$. Но из делимости a^{21} на b^{10} следует, что $21k \geq 10m$. Отсюда $21k \geq 10(2k + 1)$, то есть $k \geq 10$. Но $a < 1000 < 2^{10} \leq p^{10} \leq p^k$, поэтому a не может делиться на p^k. Противоречие.

Задача 65092 Тема: [Уравнения в целых числах]

Сложность: 3+
Классы: 8,9

Исследование уравнений в целых числах

Серии решений

Автор: Берлов С.Л.

Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ найдутся такие натуральные числа a, b, c, d, что $a + b = c + d = ab - cd = 4n$.

Решение

Положим $a = 2n + x$, $b = 2n - x$, $c = 2n + y$, $d = 2n - y$. Тогда равенство перепишется в виде $y^2 - x^2 = 4n$. Теперь предположим, что $y + x = 2n$,
$y - x = 2$. Получим $x = n - 1$, $y = n + 1$, откуда $a = 3n - 1$, $b = n + 1$, $c = 3n + 1$, $d = n - 1$.

Задача 65119 Темы: [Уравнения в целых числах]
[Доказательство от противного]

Сложность: 3+
Классы: 9,10,11

Автор: Сендеров В.А.

Целые числа a, x_1, x_2, ..., x_{13} таковы, что $a = (1 + x_1)(1 + x_2)...(1 + x_{13}) = (1 - x_1)(1 - x_2)...(1 - x_{13})$. Докажите, что $ax_1x_2...x_{13} = 0$.

Решение

Четность-нечетность. A U B = решение

Если какое-то из чисел x_i равно 0, утверждение очевидно. Если одно из x_i равно ±1, то $a = 0$, и утверждение также верно. В противном случае каждое произведение $(1 + x_i)(1 - x_i) = 1 - x_i^2$ отрицательно. Поэтому $a^2 = (1 + x_1)(1 + x_2)...(1 + x_{13})(1 - x_1)(1 - x_2)...(1 - x_{13})$ – отрицательное число (как произведение 13 отрицательных чисел). Противоречие.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 65128 Тема: [Исследование квадратного трехчлена]

Сложность: 3+
Классы: 10,11

Автор: Храбров А.

Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел a и b верно неравенство $f(a^2 + b^2) \geq f(2ab)$. Докажите, что хотя бы один из корней этого трёхчлена – отрицательный.

Решение

Понимание сути квадратного трехчлена на графике. Разобрать все три решения

Предположим, что оба корня трёхчлена неотрицательны, и придём к противоречию.

Первый способ. Подставим в условие $b = 0$ и получим, что $f(a^2) \geq f(0)$ при всех a. Следовательно, $f(t) \geq f(0)$ при любом положительном t. Из этого следует, в частности, что ветви параболы направлены вверх.

По предположению вершина параболы имеет положительную абсциссу, назовём ее t_0. Но тогда $f(0) > f(t_0)$. Противоречие.

Второй способ. Пусть t_0 – положительная абсцисса вершины параболы.

Если ветви параболы направлены вверх, то наименьшее значение трёхчлена равно $f(t_0)$. Подставив в условие $b = -a$, получим, что $f(2a^2) \geq f(-2a^2)$ при всех a. Следовательно, $f(t) \geq f(-t)$ при любом положительном t; в частности, $f(t_0) \geq f(-t_0)$, что невозможно.

Пусть ветви параболы направлены вниз. Тогда наибольшее значение трёхчлена равно $f(t_0)$. Подставив в условие $b = 2a$, получим, что $f(5a^2) \geq f(4a^2)$ при всех a. Следовательно, $f(^{5t}/_4) \geq f(t)$ при любом положительном t; в частности, $f(^{5t_0}/_4) \geq f(t_0)$, что невозможно.

Третий способ. Заметим, что для любых чисел $0 \leq p \leq q$ можно подобрать такие неотрицательные числа a и b, что $p = 2ab$ и $q = a^2 + b^2$. Следовательно, для любых чисел $0 \leq p \leq q$ имеем неравенство $f(p) \leq f(q)$. Таким образом, на положительной полуоси трёхчлен возрастает. Поэтому ветви его графика направлены вверх. Но тогда он не может иметь два неотрицательных корня, поскольку это противоречит возрастанию.

Задача 65176 Тема: [Квадратные неравенства и системы неравенств]

Сложность: 3+
Классы: 10,11

По положительным числам x и y вычисляют $a = {}^1/_y$ и $b = y + {}^1/_x$. После этого находят C – наименьшее число из трёх: x, a и b. Какое наибольшее значение может принимать C?

Исследование неравенств. База

Решение

Из условия следует, что $C \le x$, $C \le a$ и $C \le b$. Так как $b = {}^1/_a + {}^1/_x$, то $C \le {}^1/_a + {}^1/_x$. Кроме того, так как все числа положительны, то ${}^1/_a \le {}^1/_C$ и
${}^1/_x \le {}^1/_C$. Таким образом, $C \le {}^1/_C + {}^1/_C$, то есть $C \le \sqrt{2}$.

Значение $\sqrt{2}$ достигается, если $x = \sqrt{2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, так как в этом случае $a = \sqrt{2}$ и $b = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Ответ

$\sqrt{2}$.

Задача 65201 Тема: [Периодичность и непериодичность]

Сложность: 3+
Классы: 10,11

Автор: Гашков С.Б.

Последовательность (a_n) такова, что $a_n = n^2$ при $1 \le n \le 5$ и при всех натуральных n выполнено равенство $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$. Найдите a_{2015}.

Решение

$a_{n+4} + a_n = a_{n+3} + a_{n-1} = ... = a_5 + a_1 = 25 + 1 = 26$. Следовательно, $a_n = 26 - a_{n+4} = 26 - (26 - a_{n+8}) = a_{n+8}$, то есть последовательность (a_n) периодическая с периодом 8. Поскольку остаток от деления 2015 на 8 равен 7, $a_{2015} = a_7 = 26 - a_3 = 17$.

Ответ

17.

Задача 65218 Темы: [Линейные неравенства и системы неравенств]
[Упорядочивание по возрастанию (убыванию)]

Сложность: 3+
Классы: 7,8

Девять чисел таковы, что сумма каждых четырёх из них меньше суммы пяти остальных. Докажите, что все числа положительны.

Решение

Упорядочим данные числа по возрастанию: $a_1 \le a_2 \le ... \le a_9$. По условию $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \ge a_2 + a_3 + a_4 + a_5$. Значит, $a_1 > 0$. Тем более остальные числа положительны.

Добавить

Прислать комментарий

Задача [65428] Тема: [Неравенство Коши]

Сложность: 3+
Классы: 9,10,11

Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, ..., x_{10}$ равна 1. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_9x_{10}$.

Решение

Мостик

Воспользуемся известным неравенством $ab \le ¼\,(a+b)^2$.

$\boxed{x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_9x_{10} \le (x_1 + x_3 + ... + x_9)(x_2 + x_4 + ... + x_{10})} \le ¼\,(x_1 + x_2 + ... + x_{10})^2 = ¼.$

Равенство, например, достигается, если $x_1 = x_2 = ½$, $x_3 = x_4 = ... = x_{10} = 0$.

Ответ

0,25.

Задача 65458 Тема: [Уравнения в целых числах]

Сложность: 3+
Классы: 9,10,11

Автор: Френкин Б.Р.

Пусть p – простое число. Сколько существует таких натуральных n, что pn делится на $p + n$?

Решение

Делимость для простых чисел

Пусть $pn = (p + n)k$, тогда $p^2 = p^2 + pn - (p + n)k = (p + n)(p - k)$. Так как $p - k < p$, то оно на p не делится. Поэтому $p + n = p^2$, то есть $n = p^2 - p$. Очевидно, оно подходит.

Ответ

Одно.

Задача 65477 Тема: [Целочисленные и целозначные многочлены]

Сложность: 3+
Классы: 10,11

У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ – один и тот же набор целых коэффициентов (их порядок – различен).
Докажите, что разность $P(2015) - Q(2015)$ кратна 1007.

Базовая задача на многочлены

Решение

У данных многочленов равны суммы коэффициентов, значит, $P(1) = Q(1)$. Поэтому $P(2015) - Q(2015) = (P(2015) - P(1)) - (Q(2015) - Q(1))$.

По *теореме Безу для целочисленных многочленов* (см. решение задачи 35562) каждая из разностей $P(2015) - P(1)$ и $Q(2015) - Q(1)$ кратна 2014, поэтому разность $P(2015) - Q(2015)$ также кратна $2014 = 2 \cdot 1007$.

Добавить   Прислать комментарий

Задача 77975 Темы: [Многочлены (прочее)] [Доказательство от противного]

Сложность: 3+
Классы: 9,10,11

Докажите, что многочлен вида $x^{200}y^{200} + 1$ нельзя представить в виде произведения многочленов от одного только x и одного только y.

Разложение многочленов. База

Решение

Предположим, что существуют многочлены $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ и $g(y) = b_0y^m + b_1y^{m-1} + ... + b_m$, для которых $f(x)g(y) = x^{200}y^{200} + 1$. Положив $x = 0$, получим $a_ng(y) = 1$, то есть $g(y) = {}^1/_{a_n}$ при всех y. Положив $y = 0$, аналогично получим, что $f(x) = {}^1/_{b_m}$ при всех x. Таким образом, $f(x)g(y) = {}^1/_{a_nb_m}$ – константа, а функция $x^{200}y^{200} + 1$, очевидно, не является константой.

Добавить

Прислать комментарий

Задача [77978](77978) Тема: [[НОД и НОК. Взаимная простота]]

Сложность: 3+
Классы: 8,9

Доказать, что наибольший общий делитель суммы двух чисел и их наименьшего общего кратного равен наибольшему общему делителю самих чисел.

Полезная лемма. Максимальная степень простого делителя.

Решение

В наименьшее общее кратное чисел a и b входят только те простые делители, которые входят в a и b. Только они и могут входить в наибольший общий делитель суммы и наименьшего общего кратного. Поэтому достаточно проследить за степенью каждого простого множителя отдельно. Пусть $a = p^{\alpha}...$ и $b = p^{\beta}...$, причём $\alpha \leq \beta$. Тогда сумма чисел a и b имеет вид $p^{\alpha}...$, а их наименьшее общее кратное имеет вид $p^{\beta}...$. Поэтому рассматриваемый наибольший общий делитель имеет вид $p^{\alpha}...$. Наибольший общий делитель самих чисел a и b имеет такой же вид.

Задача 78102 Темы: [Смешанные уравнения и системы уравнений]
[Целая и дробная части. Принцип Архимеда]

Сложность: 3+
Классы: 10,11

Решить уравнение $x^3 - [x] = 3$.

Базовая задача на целую часть.

Решение

Пусть $[x] = n$ и $x = n + \alpha$, где $0 \le \alpha < 1$. Тогда $x^3 - x + \alpha = 3$, и из ограничений на α следует, что $2 < x^3 - x \le 3$.

Если $x \ge 2$, то $x(x^2 - 1) \ge 2 \cdot 3 = 6$, поэтому неравенство $x^3 - x \le 3$ не выполняется. Если $x < -1$, то $x(x^2 - 1) < 0$, поэтому неравенство $2 < x^3 - x$ не выполняется.

Таким образом, $-1 \le x < 2$, то есть $[x] = -1, 0$ или 1. Соответственно получаем уравнения $x^3 + 1 = 3$, $x^3 = 3$, $x^3 - 1 = 3$. Их решения:

$x = \sqrt[3]{2}$, $x = \sqrt[3]{3}$, $x = \sqrt[3]{4}$. При этом $[\sqrt[3]{2}] \ne -1$, $[\sqrt[3]{3}] \ne 0$, а $[\sqrt[3]{4}] = 1$.

Ответ

$x = \sqrt[3]{4}$.

Задача 78520 Темы: [Системы показательных уравнений и неравенств] [Монотонность и ограниченность]

Сложность: 3+
Классы: 9,10,11

Решить в положительных числах систему:

$$\begin{cases} x^y &= z, \\ y^z &= x, \\ z^x &= y. \end{cases}$$

Мостик - сравнение с 1

Решение

Заметим сначала, что если одна из неизвестных равна единице, то остальные тоже равны единице. Действительно, пусть $x = 1$. Тогда $z = 1^y = 1$, $y = z^x = 1^1 = 1$. Предположим, что существует ещё какое-нибудь решение кроме (1, 1, 1). Пусть сначала $\boxed{x > 1}$. Тогда $z = x^y > 1$, $y = z^x > 1$. Следовательно, $z = x^y > x^1 = x$, $y = z^x > z^1 = z$, $x = y^z > y^1 = y$, что невозможно. Значит, этот случай невозможен. Случай $x < 1$ получается из случая $x > 1$ заменой всех знаков ``>" на знаки ``<".

Ответ

$x = y = z = 1$.

Задача 78578 Темы: [Арифметика остатков (прочее)] [Принцип Дирихле (прочее)] [Доказательство от противного]

Сложность: 3+
Классы: 8,9,10

Все целые числа от 1 до $2n$ выписаны в строчку. Затем к каждому числу прибавили номер того места, на котором оно стоит. Доказать, что среди полученных сумм найдутся хотя бы две, дающие при делении на $2n$ одинаковый остаток.

Формализация задачи. Полная система вычетов

Решение

Пусть в строчку выписаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Предположим, что все числа $a_1 + 1$, $a_2 + 2$, ..., $a_{2n} + 2n$ дают разные остатки при делении на $2n$. Тогда эти остатки равны 1, 2, ..., $2n$. Поэтому $(a_1 + 1) + (a_2 + 2) + \ldots + (a_{2n} + 2n) = 2(1 + 2 + \ldots + 2n) \equiv 1 + 2 + \ldots + 2n \pmod{2n}$. Противоречие, поскольку
$1 + 2 + \ldots + 2n = n(2n + 1) \equiv n \pmod{2n}$.