Задача 1. Решите уравнение в целых числах

$$x^2(y^2+1) = 5y+1 \quad \textit{(М. Абдувалиев)}$$

Задача №1 (M. Abduvaliev).

Решите уравнение в целых числах

$x^2(y^2+1) = 5y+1$.

Решение:

Если $x=0$, решений нет.

Если $|x| \geq 2 \Rightarrow 5y+1 \geq 4y^2+4 \Leftrightarrow \left(2y-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{16} \leq 0$ - решений нет.

Если $|x| = 1 \Rightarrow y^2 = 5y \Rightarrow y = 0; 5$.

Ответ: $(\pm 1; 0), (\pm 1; 5)$.

Критерии:

1. Не рассмотрение случая $x=0$: -2 балла.
2. Подбор корней: 1 балл.
3. Строгое доказательство того, что при $|x| \geq 2$ корней нет: 5 баллов.
4. Забыли $x = -1$ или часть корней: -1 балл.
5. Строгое доказательство того, что $1 \leq y \leq 5$: 5 баллов.
6. Ошибки при доказательстве того, что $|x| \geq 2$ или $1 \leq y \leq 5$: до -2 баллов.
7. Использование соображений делимости и остатков (если они не дают критериальное продвижение): 0 баллов.

Пункт 3, 5, 6 не суммируются

Задача 2. Диагонали трапеции ABCD (AD || BC) пересекаются в точке K. Внутри треугольника ABK нашлась такая точка M, что $\angle MBC = \angle MAD, \angle MCB = \angle MDA$. Докажите, что прямая MK параллельна основаниям трапеции. (М. Кунгожин)

Решение. Опустим из точки M перпендикуляры MP и MQ, на прямые AD и BC соответственно. Треугольники MBC и MAD подобны по двум углам. Поэтому $MP/MQ = AD/BC$. Теперь опустим перпендикуляры KR и KS на прямые AD и BC из точки K. Треугольники KBC и KDA также подобны по двум углам, откуда $KR/KS = AD/BC = MP/MQ = m$. Кроме того $MP+MQ = PQ = RS = KR+KS = n$. Тогда из равенств $MP/(n–MP) = m = KR/(n–KR)$ имеем $MP = mn/(m+1) = KR$. Таким образом, $MPRK$ — прямоугольник, откуда и следует утверждение задачи.

Критерии:

1. Просто за подобие 0, за подобие с указанием, что коэффициенты одинаковые + из точек К, М опускается высота и доказывается, что соотношение высот равны – 4 балла
2. Через точки К, М проводятся параллельные основаниям линии. На боковых сторонах отмечаются точки и доказывается, что отношение отрезков равны. – 4 балла.
3. Любое полное решение - 7 баллов.
4. Утверждение "отрезки относятся в одинаковом отношении, следовательно точки совпадают", "отрезки относятся в одинаковом отношение, следовательно отрезки равны" не принимаются (-3 балла)

Пункты 1, 2 не суммируются

Задача 3. При каких натуральных n можно так отметить несколько клеток доски $n \times n$, чтобы во всех строках и столбцах было чётное число отмеченных клеток, а на всех $4n–6$ диагоналях, длина которых больше одной клетки, —нечётное? (С. Берлов)

При всех нечётных n. Решение. При нечётном n отметим все клетки верхней и нижней горизонталей, кроме левых угловых. При чётном n будем рассуждать от противного. Раскрасим все клетки в шахматном порядке так, чтобы левый нижний угол был чёрным. Заметим, что среди белых клеток должно быть нечётное число отмеченных, поскольку все они находятся в объединении n–1 диагоналей, больших 1 по длине. Но если просуммировать отмеченные клетки во всех вертикалях, начиная со второй слева через одну, а потом добавить к ним сумму всех отмеченных клеток в горизонталях, начиная со второй снизу через одну, то каждую отмеченную белую клетку посчитаем ровно один раз, а каждую отмеченную чёрную — ноль или два раза, т. е. насчитаем нечётное число отмеченных клеток. Но это сумма нескольких чётных чисел. Противоречие.

Критерии

Только пример с расскраской. Обоснование стандартного примера не обязательно.	2 балла
Только ответ.	0 баллов
Рассмотрение или нерассмотрение случая n=1 на оценку не влияет.	
При четном n доказано, что из угловых клеток отмечены ровно две соседние, дальнейших продвижений нет	0 баллов за оценку
В оценке в явном виде (т.е. не "следует из рассуждений") доказано, что на белых клетках отмечено нечетное количество.	1 балл
Полное решение	7 баллов

Задача 4. Даны положительные числа x, y такие, что $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. Докажите, что

$$x^3 + y^3 \leq 2$$

$3x^2 \leq 2x^3 + 1$

$4y^3 \leq 3y^4 + 1$, следовательно

$x^3 + y^3 + 3(x^2 + y^3) \leq 2 + 3(x^3 + y^4)$.

Следовательно $x^3 + y^3 \leq 2$.

Критерии:

1) *Полное решение 7 баллов*
2) *Рассматриваются (с доказательством) оба случая*
   $0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1$ и $x \geq 1, y \geq 1$ *1балл*
3) *Рассматривается (с доказательством) один из случаев*
   $0 < 1 \leq x, 0 < y \leq 1$ *или* $0 < x \leq 1, 0 < 1 \leq y$ *1 балл*

   Многие пытались рассматреть данные 4 случая, но сложность состоит в том, что тяжелее всего разобрать 3 и 4 случаи. У всех есть ошибки в рассуждениях при разборе 3, 4 случая. Подумайте перед тем как подавать на апелляцию по данной задаче.

Задача 5. Найдите все положительные рациональные числа x, y, z если $x+\frac{1}{y}, y+\frac{1}{z}, z+\frac{1}{x}$ являются целыми числами.

Задача №5.

Найдите все положительные рациональные числа x, y, z если $x+\dfrac{1}{y}$, $y+\dfrac{1}{z}$, $z+\dfrac{1}{x}$ являются целыми числами.

Решение:

$x=\dfrac{p}{q}$, $y=\dfrac{r}{s}$, $z=\dfrac{t}{u}$, где $p, q, r, s, t, u \in \mathbb{N}$, $(p, q)=(r, s)=(t, u)=1$.

$\dfrac{p}{q}+\dfrac{s}{r} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (pr+qs) \vdots qr \Rightarrow pr \vdots q \Rightarrow r \vdots q$.

$qs \vdots r \Rightarrow q \vdots r \Rightarrow q=r$.

Тогда, $p+s \vdots q \Rightarrow p+q+s \vdots q$.

Аналогично, $s=t$, $u=p$,

$p+q+s \vdots p, p+q+s \vdots s$.

p, q, s попарно взаимно-простые, поэтому $p+q+s \vdots pqs$.

БОО $p \leq q \leq s \Rightarrow 3s \geq p+q+s \geq pqs \Rightarrow pq \leq 3 \Rightarrow p \leq 1$.

Таким образом находим три тройки $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$, также подходят все их перестановки.

Ответ: $(x, y, z)=(1, 1, 1), \left(1, \dfrac{1}{2}, 2\right), \left(\dfrac{1}{2}, 2, 1\right), \left(2, 1, \dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, 3\right)$, $\left(3, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right), \left(\dfrac{2}{3}, 3, \dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{2}, 2\right), \left(2, \dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{2}\right), \left(\dfrac{3}{2}, 2, \dfrac{1}{3}\right)$.

Критерии:

$p+q+s \vdots p, q, s$: 3 балла. Подойдет также то, что попарные суммы делят третье выражение.

$p+q+s \vdots pqs$: $+1$ балл.

$p+q+s \geq pqs$: $+1$ балл. Использование неравенств при другом решении тоже +1 балл.

Доведение до конца: $+2$ балла.

Мелкие недочеты или ошибки: до -2 баллов.

$q=r$, $s=t$, $u=p$ или $xyz=1$: 2 балла.

Нет перехода от рациональных чисел к целым: 0 баллов.

Задача 6. В равенстве $1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm 2020^2 \pm 2021^2 = 2021$ расставьте знаки таким образом, чтобы это равенство выполнялось.

Задача №6.

В равенстве $1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \ldots \pm 2020^2 \pm 2021^2 = 2021$ расставьте знаки таким образом, чтобы это равенство выполнялось.

Решение:

$(n+3)^2 - (n+2)^2 - (n+1)^2 + n^2 = 4$.

2020 квадратов начиная с 2^2, разбитых на подряд идущие четверки, могут нам дать $505 \cdot 4 = 2020$.

Критерии:

Выявление закономерности, что четыре подряд идущих квадрата (с правильно расставленными знаками) дают 4 и дальнейшая правильная расстановка знаков: 5 баллов.

Строгое доказательство через формулу $(n+3)^2 - (n+2)^2 - (n+1)^2 + n^2 = 4$ или индукцию: 7 баллов.

Решение через другую расстановку и формулу суммы прогрессии, но без строгого доказательства, что это прогрессия: 5 баллов.

Неправильная расстановка знаков: 0 баллов.

Знаки расставлены правильно, но больше ничего нет: 0 баллов.

Задача 7. В квадрате со стороной 1 находятся 4 точки. Доказать, что расстояние между какими-то двумя из них не превосходит 1.

Если на какой-то из сторон квадрата нет ни одной из четырёх точек, то растянув пространство внутри квадрата вдоль перпендикулярного направления (см. рис. 1), мы все расстояния между данными точками не уменьшаем и добиваемся того, что на стороне появляется точка. Таким образом, можем считать, что на каждой стороне лежит одна из четырёх точек. При этом не исключается случай, когда одна точка лежит сразу на двух сторонах, то есть она находится в вершине квадрата.

Будет доказывать от противного. Предположим, что не существует двух точек на расстоянии не больше 1.

Рассмотрим следующие два случая:

1. Одна из точек находится в вершине квадрата (см. рис. 2). Разделим квадрат диагоналями на 4 треугольника. Диаметр каждого треугольника меньше 1, поэтому две точки не могут одновременно находиться в одном треугольнике. Значит, треугольники T1 и T2 заняты нашей точкой в вершине. Но тогда остаются только два свободных треугольника, T3 и T4, а точек остаётся три. Пришли к противоречию.

2. Все точки на сторонах квадрата, но не в вершинах (см. рис. 3). В таком случае они образуют четырёхугольник, периметр которого должен быть больше 4. Однако, заметим, что в треугольнике T1 две стороны принадлежат сторонам квадрата, а третья — нашему четырёхугольнику. По нер-ву треугольника длина стороны четырёхугольника меньше суммы двух других сторон T1. Сложив эти нер-ва для этих четырёх треугольников, получим, что периметр квадрата больше периметра четырёхугольника, но периметр квадрата равен 4 и не может быть больше периметра 4-угольника, то есть получили противоречие.

Таким образом, исходное предположение неверно, и всегда найдётся пара точек на расстоянии не больше 1.

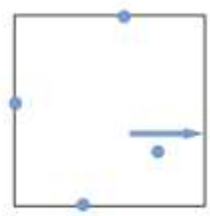

Рис. 1

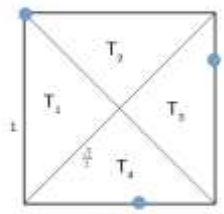

Рис. 2

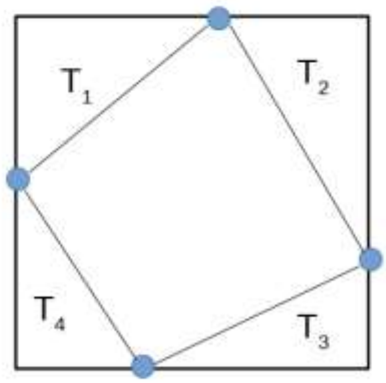

Рис. 3

Критерии:

1) *Доказан случай, когда 4 точки лежат на одной окружности* — *1 балл*
2) *Утверждается, что четырехугольник с периметром 4 и более не может поместиться в квадрат с периметром 4.* — *0 баллов*
3) *Три точек из четырех не могут лежать на одной прямой* — *1 балл*
4) *Указывается, что точки должны быть на сторонах квадрата* — *2 балла*
5) *Нет доказательства, что в тупоугольном равнобедренном треугольнике со сторонами 1,1,а* $a \geq \sqrt{2}$ — *-2 балла*
6) *Случай когда, одна точка на вершине, остальные три на сторонах* — *2 балла*
7) *Рассматривается случай (с доказательством), когда все точки на сторонах квадрата* — *2 балла*

Пункты 1, 3 не суммируются

Задача 8. Пусть М — конечное множество чисел. Известно, что среди любых трех его элементов найдутся два, сумма которых принадлежит М. Какое наибольшее число элементов может быть в М?

Пример множества из 7 элементов: $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Докажем, что при $m \geqslant 8$ множество из m чисел $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ требуемым свойством не обладает. Не ограничивая общности можно считать, что $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_m$ и $a_4 > 0$ (ясно, что умножение на -1 наше свойство не меняет). Тогда $a_1 + a_2 > a_1 + a_3 > a_1 + a_4 > a_1$, т. е. ни одна из сумм $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$ и $a_1 + a_4$ множеству A не принадлежит. Кроме того, суммы $a_2 + a_3$ и $a_2 + a_4$ не могут одновременно принадлежать A, поскольку $a_2 + a_3 > a_2$, $a_2 + a_4 > a_2$ и $a_2 + a_3 \neq a_2 + a_4$. Получается, что по крайней мере для одной из троек (a_1, a_2, a_3) и (a_1, a_2, a_4) сумма любых двух ее элементов множеству A не принадлежит.

Критерии:

1) Есть пример для 7 элементов 1 балл.
2) Рассматриваются наибольшие положительные три числа (отрицательные три числа), но нет продвижений 1 балл
3) Полное решение 7 баллов

Задача 9. Найдите все возможные значения выражения $[x] * \left[\frac{2000}{x}\right]$, где $[a]$ - наибольшее целое число, не превосходящее a.

Переформулируем задачу в более симметричной форме. Обозначим число $2000/x$ через y. В задаче идет речь про произведение целых частей двух положительных чисел x и y, для которых $xy = 2000$.

Ответ: 0, а также все натуральные значения от 1000 до 2000.

Убедимся сначала, что любое из этих значений достигается. Значение 0 достигается при любом $0 < x < 1$. Кроме того, при всех $x \in [1, 2)$ число $1000/x$ принимает все вещественные значения из интервала $(1000, 2000]$, и его целая часть принимает любое целое значение от 1000 до 2000 (включительно). Умножая их на $[x] = 1$, получаем все ответы от 1000 до 2000.

Докажем, что других значений нет. Верхняя оценка очевидна: $[x][y] \leqslant xy = 2000$.

Если одна из целых частей равна 0, то и произведение равно 0. Случай, когда одна из целых частей равна 1, разбирался выше.

Следовательно, осталось доказать, что при $x, y \geqslant 2$ выполнено неравенство $[x][y] \geqslant 1000$.

Ясно, что хотя бы одна из целых частей больше или равна 3 (иначе оба числа x и y меньше 3, что невозможно). Не умаляя общности допустим, что $[x] \geqslant 2$, $[y] \geqslant 3$.

Заметим, что $x/[x] < ([x]+1)/[x] = 1 + 1/[x] \leqslant 1 + 1/2$, ибо $[x] \geqslant 2$. Аналогично, $y/[y] < 1 + 1/[y] \leqslant 1 + 1/3$, ибо $[y] \geqslant 3$.

Перемножая эти неравенства, получаем $xy/[x][y] < (1 + 1/2)(1 + 1/3) = 2$, то есть $[x][y] > xy/2 = 1000$, что и требовалось.

Для отрицательных чисел есть два варианта. Оба варианта принимаются.

В данной задаче дано определение []. Если строго следовать данному определению, то выражение может принимать все целые числа $a \geq 2000$ для отрицательных x

Если ученик использовал определение [], которое задано другим образом $[x] = \lfloor x \rfloor$, то случай для отрицательных x аналогичен случаю с положительными числами. Нужно указать, что $[-x] = -[x]$.

Критерии:

Пусть M - множество значений, которые может принимать данное выражение

1)	Доказано, что $0 \in \mathrm{M}$	*1 балл*
2)	*Доказано, что* $[1000, 1001, \dots, 2000] \subseteq \mathrm{M}$	*1 балл*
3)	*M содержит бесконечно количество элементов*	*1 балл*
4)	*Не рассмотрен случай с отрицательными числами*	*-2 балла*
5)	*Незначительные упущения*	*-1 балл*
6)	*Рассмотрен случай с отрицательными числами*	*1 балл*

Пункты 1, 2, 3 не суммируются.

Задача 10. Треугольники $\triangle ABC$*,* $\triangle A'B'C'$ *лежат на одной окружности с центром* O *и имеют общий ортоцентр* H*. Линии* AA', BB', CC' *пересекаются в точках* X, Y, Z*. Докажите, что центр описанной окружности треугольника* $\triangle XYZ$ *лежит на линии* OH.

Критерии:

1) Указано, что у данных треугольников общая окружность 9 точек.   1 балл

2) Попытка использовать инверсию, рассмотрение оси окружностей   1 балл