**Первый тур дистанционного этапа XIII олимпиады имени Леонарда Эйлера**

**Решения задач и предварительные критерии оценки**

**1.** *За круглым столом сидели 99 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них сказал: «Хотя бы один из двух моих соседей — лжец.» Могло ли среди них быть ровно 60 рыцарей?* (Фольклор)

Ответ. Могло. Решение. Сначала посадим за стол 39 лжецов. Потом в 21 промежуток между соседними лжецами посадим по два рыцаря, а в остальные 18 промежутков — по одному рыцарю. Нетрудно проверить, что такая рассадка удовлетворяет всем условиям задачи. Замечание. Из условия оба соседа каждого лжеца — рыцари, а среди соседей рыцаря — один или два лжеца (\*). Отсюда следует, что между каждыми двумя лжецами сидят один или два рыцаря. Таким образом, в решении описаны *все* удовлетворяющие условию рассадки.

Критерии. Приведена верная рассадка: *7 баллов*. Нет верной рассадки, но есть утверждение (\*): *2 балла*. Только ответ без примера рассадки: *0 баллов*.

**2.** *Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что НОД(a, b)+НОК(a, b) = ab/2.* (И. Рубанов)

Ответ. *a* = *b* = 4; *a* = 3, *b* = 6; *a* = 6, *b* = 3. Первое решение. Пусть НОД(*a*, *b*) = *d*, *a* = *xd*, *b* = *yd*. Тогда НОК(*a*, *b*) = *xyd* и уравнение принимает вид *d*+*xyd* = *xyd*2/2, откуда 2*xy*+2 = *xyd*. Значит, 2 делится на *xy*, то есть *xy* = 1 или *xy* = 2. В первом случае имеем *x* = *y* = 1, *d* = 4, то есть *a* = *b* = 4; во втором числа *x* и *y* — это 1 и 2 (в каком-то порядке), а *d* = 3, откуда *a* и *b* — это 3 и 6. Второе решение. Так как число *ab*/2 — целое, среди чисел *a* и *b* есть чётное. Пусть это число *a*. Тогда НОД(*a*, *b*) = *ab*/2–НОК(*a*, *b*) делится на *b*. Это возможно только если НОД(*a*, *b*) = *b*, то есть *a* делится на *b*. С другой стороны, *ab*/2 и НОК(*a*, *b*) кратны *a*/2, поэтому НОД(*a*, *b*) *= b* делится на *a*/2. Таким образом, либо *a = b*, либо *a =*2*b*. В первом случае получаем 2*b = b*2/2, то есть *a = b =*4, во втором *b*+2*b = b*2, то есть *a =*6 и *b =*3. Случай, когда *b* четно, разбирается аналогично и дает решение *a* = 3, *b* = 6.

Критерии. Найдены все искомые пары чисел (из пар (3, 6) и (6, 3) достаточно указать одну) без доказательства, что других искомых пар нет: *2 балла*; Найдена только одна искомая пара (пары (3, 6) и (6, 3) тут считаются за одну), дальнейшего содержательного продвижения нет: *1 балл*. Если в ответе указана только одна из пар (3, 6) и (6, 3), а в остальном решение верно, *оценка не снижается*. Существуют решения, основанное на том, что НОД(*a*, *b*)НОК(*a*,*b*) = *ab.* В них этот факт можно использовать без доказательства.

**3.** *На шахматной доске 8х8 нарисованы по клеточкам 17 не налегающих друг на друга двухклеточных прямоугольников. Докажите, что на доске найдутся две имеющие общую сторону клетки, одна из которых лежит в одном из нарисованных прямоугольников, а другая — в другом.* (И. Рубанов)

Решение. Разобьём доску на 16 квадратов 2х2. Отметим клетки нарисованных прямоугольников. Всего будет отмечено 34 клетки. Это больше, чем 2⋅16, поэтому найдется квадрат, в котором можно выбрать три отмеченные клетки. Центральная клетка образованного ими «уголка» не может лежать в одном нарисованном прямоугольнике с обеими его боковыми клетками, откуда и вытекает утверждение задачи.

Критерии. В решении, аналогичном нашему, не объяснено явно, как из наличия квадрата 2х2, в котором отмечены по крайней мере три клетки, вытекает утверждение задачи: *минус 1 балл*.

**4.***Положительные числа a, b, c, d таковы, что (a+b+2c)2 > d, (b+c+2d)2 > a, (c+d+2a)2 > b, (d+a+2b)2 > c. Докажите, что a+b+c+d > 1/4.* (И. Богданов)

Решение. Пусть *d* — наибольшее из четырех данных чисел (другие случаи аналогичны). Тогда (*a*+*b*+*c*+*d*)2 ≥ (*a*+*b*+2*c*)2 >*d* ≥ (*a*+*b*+*c*+*d*)/4, откуда *a*+*b*+*c*+*d* > 1/4.

**5.***В треугольнике ABC (C = 90°) на катете BC отмечены точки K и L такие, что CAK = KAL = LAB. На гипотенузе AB отмечена точка M такая, что ML = KL. Докажите, что перпендикуляр из точки C на прямую AK* ***не*** *делит отрезок ML пополам*. (М. Кунгожин)

Решение. Проведем окружность  с центром в точке *L* и радиусом *KL*. Она пересекает прямую *AB* в двух точках или касается ее. Рассмотрим первый случай (второй сводится к нему). Одной из двух точек пересечения будет точка *M*1, симметричная точке *K* относительно прямой *AL*, так как она лежит на прямой *AB* и *LM*1 = *LK*. При этом *LM*1*A* = *AKL* = *ACK*+*CAK* > 90. Поэтому угол *LM*1*A* является внешним углом равнобедренного треугольника *M*1*LM*2, где *M*2 — вторая точка пересечения  с *AB*, и точка *M*1 лежит между точками *A* и *M*2.

Положим*CAK* = *KAL* = *LAB* = α, а через *N* обозначим середину основания *KM*1 равнобедренного треугольника *KLM*1. Из равенства прямоугольных треугольников *ACK* и *ANK* находим *AKN* = *AKC* = 90–α, откуда *NM*1*L* = *NKL* = *AKL*–*AKN* = (90+α)–(90–α) = 2α.

Пусть *P* — середина отрезка *LM*1, *R* — середина отрезка *LM*2, а *Q* — точка пересечения прямой *CN* с отрезком *M1L*. Поскольку Δ*ACK* = Δ*ANK*, *KC* = *KN*, откуда *CN*  *AK* и *M*1*NQ* = *KNC* = *KCN* =  < 2 = *M*1*NP*. Таким образом, точка *Q* лежит между точками *M*1 и *P*, следовательно, прямая *CQ* не может проходить через точку *P*. Через точку *R* прямая *CQ* также не может проходить, поскольку *CQL*+*LQR* < *CPL*+*LPR* < 180.

Критерии. Показано, что есть два случая, дальнейшего содержательного продвижения нет: *1 балл*. Доказано, что перпендикуляр из точки *C* на прямую *AK* проходит через середину отрезка *M*1*K*, дальнейшего содержательного продвижения нет: *1 балл*. Рассмотрен только один из двух возможных случаев: *не выше 3 баллов*. Замечены оба случая, рассмотрен только один из них: *не выше 4 баллов*.