Вторник, 16 июля 2019 г.

Задача 1. Пусть $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел. Найдите все функции $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такие, что для любых целых чисел a и b верно равенство

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Задача 2. В треугольнике ABC точка A_1 лежит на отрезке BC, а точка B_1 лежит на отрезке AC. Пусть P и Q — точки на отрезках AA_1 и BB_1 соответственно, такие, что прямая PQ параллельна AB. Точка P_1, лежащая на прямой PB_1, такова, что B_1 находится строго между P и P_1, причем $\angle PP_1C = \angle BAC$. Аналогично, точка Q_1, лежащая на прямой QA_1, такова, что A_1 находится строго между Q и Q_1, причем $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Докажите, что точки P, Q, P_1 и Q_1 лежат на одной окружности.

Задача 3. В социальной сети 2019 пользователей. Некоторые пользователи дружат с некоторыми другими, при этом отношение дружбы взаимно, то есть если пользователь A дружит с пользователем B, то B также дружит с A. Перестройки следующего типа производятся последовательно, по одной перестройке за раз:

> выбираются три пользователя A, B и C таких, что A дружит и с B и с C, но B и C не дружат между собой; после чего B и C становятся друзьями, но A теперь не дружит ни с B, ни с C.

Изначально 1010 пользователей имеют по 1009 друзей, а 1009 пользователей имеют по 1010 друзей. Докажите, что существует последовательность перестроек, после которой каждый пользователь будет иметь не более одного друга.

Время на работу: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов

Среда, 17 июля 2019 г.

Задача 4. Найдите все пары (k, n) целых положительных чисел такие, что

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Задача 5. Банк города Бат выпускает монеты с буквой H на одной стороне и буквой T на другой стороне. Гарри разложил n таких монет в ряд слева направо. Он последовательно производит следующую операцию: если в ряду ровно $k > 0$ монет лежат буквой H кверху, то он переворачивает k-ю слева монету; иначе все монеты лежат буквой T кверху, и он останавливается. Например, если $n = 3$ и процесс начинается с конфигурации THT, то последовательность операций выглядит как $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, то есть процесс остановится после трех операций.

(a) Докажите, что при любой начальной конфигурации процесс остановится после конечного числа операций.

(b) Для каждой начальной конфигурации C через $L(C)$ обозначим количество операций, после которых процесс остановится. Например, $L(THT) = 3$ и $L(TTT) = 0$. Найдите среднее арифметическое значений $L(C)$, когда C пробегает все 2^n возможных начальных конфигураций.

Задача 6. Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC, в котором $AB \neq AC$. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Прямая, проходящая через D и перпендикулярная EF, пересекает ω вторично в точке R. Прямая AR пересекает ω вторично в точке P. Окружности, описанные около треугольников PCE и PBF, пересекаются вторично в точке Q.

Докажите, что прямые DI и PQ пересекаются на прямой, проходящей через A и перпендикулярной AI.