Конструктивность в ТЧ

№1. Дано натуральное число n. Докажите, что существует непостоянная АП такая, что все члены имеют вид $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ $(a_i \in \mathbb{N})$.

№2. Дано натуральное число n. Докажите, что существует АП натуральных чисел таких, что $(a_i, a_j) = 1$ для всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

№3. Докажите, что из любой АП натуральных чисел можно выделить бесконечную подпоследовательность ГП.

№4. Дана бесконечная АП натуральных чисел где $(a_1, d) = 1$. Докажите, что из нее можно выделить бесконечную подпоследовательность такую, что любые два члена взаимно просты.

№5. Дано $k \in \mathbb{N}$. Пусть $D(n) = [n, n+1, \ldots, n+k]$. Докажите, что существует бесконечно много n таких, что $D(n) > D(n+1)$.

№6. Пусть $\sigma(n)$ — сумма делителей n. Пусть

$$A = \left\{ n \mid \frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(k)}{k}, \text{ для всех } k = 1, 2, \ldots n-1 \right\}.$$

Докажите, что в множестве A бесконечно много чисел.

№7. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$ имеет бесконечно много решении в целых числах.

№8. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных (a, b) таких, что $a > 1, b > 1, (a, b) = 1$ и $a^b + b^a$ делится на $a + b$.

№9. Докажите, что любого натурального n существует натуральное число m такое, что $3^m + 5^m - 1 \vdots 11^n$.

№10. Докажите, что для любого натурального n существует натуральная последовательность $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ такая, что сумма $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ — полный куб, а сумма $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3$ — полный квадрат.

Задачи для зачета.

№11. Докажите, что в бесконечной АП $\{a_n\}$ натуральных чисел, существуют m и k такие, что $S(a_m) = S(a_k)$.

№12. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1) + P(2) + \ldots + P(n)$ делится на k.

Функции, многочлены, последовательности в ТЧ

№1. Дана последовательность $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $v_2(n) = v_2(a_n)$.

№2. Дано $c \in \mathbb{N}$. Пусть $\{p_k\}_{k\geqslant 1} \in \mathbb{P}$ и $p_k + c \,\vdots\, p_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что последовательность $\{p_k\}$ ограничена.

№3. Даны $a, b \in \mathbb{N}$ и последовательность $x_0 = 1$, $x_{n+1} = ax_n + b$ $(n \geqslant 0)$. Докажите, что существует $n \in \mathbb{N}$ такой, что x_n — составное число.

№4. Дано $k \in \mathbb{N}$, $a_1 = k + 1$, $a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k$ для всех $n \geqslant 1$. Докажите, что $(a_m, a_n) = 1$ для всех $m \neq n$.

№5. Дан многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что при $n = 1, 2, \ldots, 2008$ $f(n) \in \{100, 101, \ldots, 999\}$. Докажите, что $f(x)$ не имеет целых корней.

№6. Докажите, что не существует многочлена с целыми коэффициентам степени выше нуля такой, что $P(n) \in \mathbb{P}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

№7. Дан трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами. Известно, что любого натурального m существует натуральное n такой, что $f(n) \,\vdots\, m$. Докажите, что f имеет рациональный корень.

№8. Дан многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что если $f(2^n) \,\vdots\, n$, то $f \equiv 0$.

№9. Даны многочлены $p(x)$ и $q(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами степени выше нуля. Докажите, что существует $n \in \mathbb{N}$ такой, что $2^{p(n)} - 1$ не делится на $q(n)$.

№10. Дан многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами. Известно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $f(n) \in \mathbb{Z}$ и для любых $m, n \in \mathbb{Z}$ $(m \neq n)$ $f(m) - f(n) \,\vdots\, m - n$. Обязательно ли, что f — многочлен целыми коэффициентами?

№11. Найдите все $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что $mf(m) + n \,\vdots\, m^2 + f(n)$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$.

Задачи для зачета.

№12. Найдите все $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, $2(a + b - 1)$ делится на $f(a) + f(b)$, для всех $a, b \in \mathbb{N}$.

№13. Найдите все $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, $af(a) + bf(b) + ab$ — точный квадрат, для любых $a, b \in \mathbb{N}$.

Теорема Кэйзи и Инверсия

№1. Докажите, что для любых точек A, B, C, D на плоскости выполнено неравенство $AB \cdot CD + BC \cdot DA \geqslant AC \cdot BD$. (Неравенство Птоломея)

№2. Пусть P точки внутри $\triangle ABC$ такая, что $\angle APB - \angle C = \angle APC - \angle B$. Пусть D, E центры вписанных окружностей $\triangle APB, \triangle APC$ соответственно. Докажите, что AP, BD, CE пересекаются в одной точке.

№3. Треугольник ABC, где $AB = AC = a$, вписан в окружность Ω. Некая окружность ω касается Ω внутренним образом и отрезка BC. Найдите расстояние касательной от A до ω.

№4. Дан угол с вершиной A и окружность, вписанная в него. Произвольная прямая, касающаяся данной окружности, пересекает стороны угла в точках B и C. Доказать, что окружность, описанная около треугольника ABC, касается фиксированной окружности, вписанной в данный угол.

№5. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC, а луч OB — с OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Доказать, что углы AOE и DOF равны.

№6. Пусть различные точки A и B лежат на окружности O и точка P является серединой отрезка AB. Окружность O_1 касается прямой AB в точке P и касается окружности O. ℓ является касательной к окружности O_1, отличной от прямой AB и проходящей через точку A. C является точкой пересечения прямой ℓ и окружности O, отличной от точки A. Точка Q является серединой отрезка BC, а окружность O_2 касается прямой BC в точке Q и касается отрезка AC. Докажите, что окружность O_2 касается окружности O.

№7. Окружности ω и Ω пересекаются в точках A и B. Пусть M — середина дуги AB окружности ω (M лежит внутри Ω). Хорда MP окружности ω пересекает Ω в точке Q (Q лежит внутри ω). Пусть ℓ_P — касательная к окружности ω в точке P, а ℓ_Q — касательная к окружности Ω в точке Q. Докажите, что окружность, описанная около треугольника, образованного при пересечении прямых ℓ_P, ℓ_Q и AB, касается Ω.

№8. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.

№9. Пусть O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC. Рассмотрим две окружности ω и Ω, вписанные в угол BAC таким образом, что ω касается внешним образом дуги BOC окружности, описанной около треугольника BOC; а окружность Ω касается внутренним образом окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что радиус Ω вдвое больше радиуса ω.

№10. В треугольник ABC вписана окружность ω с центром в точке I. Около треугольника AIB описана окружность Γ. Окружности ω и Γ пересекаются в точках X и Y. Общие касательные к окружностям ω и Γ пересекаются в точке Z. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XYZ, касаются.

Задачи для зачета.

№11. Докажите теорему Фейербаха двумя способами: инверсией и теоремой Кэйзи.

№12. Найдите радиус полувписанной окружности треугольника ABC, если его стороны $AB = c, BC = a, CA = b$.

Симедиана, двойное отношение

№1. Пусть стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, BC и AD – в точке F, диагонали AC и BD пересекают EF в точках M и N. Докажите, что $(EF;MN)=1$.

№2. На одной прямой лежат точки A,B,C,D в этом же порядке и $(AC;BD)= = 1$. Пусть X такая точка на плоскости, что $\angle BXD=90^\circ$. Докажите, что $\angle BXA=\angle BXC$.

№3. Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A_1 и B_1 соответственно, прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке C_1. Докажите, что CC_1 — симедиана треугольника ABC.

№4. Дан треугольник ABC. Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает прямую AB в точке D Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит отрезок BC пополам.

№5. Дан фиксированный треугольник ABC. По его описанной окружности движется точка P так, что хорды BC и AP пересекаются. Прямая AP разрезает треугольник BPC на два меньших, центры вписанных окружностей которых обозначим через I_1 и I_2 соответственно. Прямая I_1I_2 пересекает прямую BC в точке Z. Докажите, что все прямые ZP проходят через фиксированную точку.

№6. На отрезках AB и BC треугольника ABC выбраны точки C_1 и A_1 соответственно так, что $AA_1\cap CC_1=O$ и $BO\cap A_1C_1=P$. $Q\in AC$ такая, что $PQ\perp AC$. Докажите, что $\angle PQO=\angle PQB$.

№7. Касательные в точках A и B к окружности ω, описанной около остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, пересекаются в точке S. Пусть M — середина стороны AB, а H — точка пересечения высот треугольника ABC. Прямая HA пересекает прямые CM и CS в точках M_a и S_a соответственно. Аналогично определены точки M_b и S_b. Докажите, что M_aS_b и M_bS_a — высоты треугольника M_aM_bH.

№8. Дан треугольник ABC с острыми углами B и C. В него вписан прямоугольник $KLMN$ так, что точки L и M лежат на сторонах AB и AC соответственно, а точки N и K — на стороне CB. Точка O — центр прямоугольника. Прямые BO и CO пересекают стороны прямоугольника MN и LK в точках C_1 и B_1 соответственно. Докажите, что прямые AO, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

№9. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Точки K и N лежат на стороне AC, а точки M и L на стороне BC так, что $AN=CK=CL=BM$. Пусть отрезки KL и MN пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle RPN=\angle QPK$, где R — середина стороны AB, а Q — середина дуги ACB окружности, описанной около треугольника ABC.

№10. Прямая PQ касается вписанной в треугольник ABC окружность таким образом, что точки P и Q лежат на сторонах AB и AC, соответственно. На сторонах AB и AC выбраны точки M и N, соответственно, так, что $AM = BP$ и $AN = CQ$. Докажите, что все построенные таким образом прямые MN проходят через одну точку.

Задачи для зачета.

№11. Пусть M — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC. Точка K внутри треугольника такова, что $\angle ACK = \angle KBC$. Докажите, что $\angle BKM + \angle AKC = 180°$.

№12. На отрезкахAB и BC треугольника ABC выбраны точки C_1 и A_1 соответственно так, что $AA_1 \cap CC_1 = O$ и $BO \cap A_1C_1 = P$. Прямая l параллельна AC и проходит через точку P. Пусть $l \cap AB_1 = X$, $l \cap CC_1 = Y$, $l \cap CB = K$, $l \cap AB = L$. Докажите, что $KX = LY$.

Алгебра. Функциональные уравнения

№1. Найдите все $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ такие, что $2f(x)+xf(\frac{1}{x})=x$, для всех $x\in\mathbb{R}^+$.

№2. Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:
(i) $f(10+x)=f(10-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$,
(ii) $f(20+x)=-f(20-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Докажите, что f нечетна и периодична.

№3. Найдите все $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ такие, что $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{Q}$.

№4. Существует ли функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что множество значении $f(x)$ — бесконечно, а множество значении $f(x)+f(2x)$ — конечно?

№5. Найдите все $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ такие, что $f(m+f(n))=f(m)+n$ для всех $m,n\in\mathbb{Z}$.

№6. Найдите все $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ т.ч. $f(y)f(x+f(y))=f(x)f(xy)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

№7. Найдите все $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ т.ч
(i) $f(x+1)=f(x)+1$, $\forall x$;
(ii) $f(x^2)=f^2(x)$, $\forall x$.

№8. Найдите все $f:\mathbb{N}\to[1;\infty)$ т.ч.
(i) $f(2)=2$,
(ii) $f(n+1)>f(n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$,
(iii) $f(mn)=f(m)f(n)$, $\forall m,n\in\mathbb{N}$.

№9. Найдите все $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ т.ч.
(i) $f(x+y)\geqslant f(x)+2y$, $\forall x\in\mathbb{R}^+$,
(ii) $f(f(x))\leqslant 4x$, $\forall x\in\mathbb{R}^+$.

№10. Найдите все $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ т.ч.
(i) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$,
(ii) $f(x)=x^2f(\frac{1}{x})$, $\forall x\in\mathbb{R}/\{0\}$.

№11. Существует ли $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ такая, что $f(x+y)>yf^2(x)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^+$?

№12. Найдите все $f:(1;+\infty)\to\mathbb{R}$ т.ч. $f(x)-f(y)=f(xy)(y-x)$, $\forall x,y>1$.

№13. Найдите все $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ т.ч.
(i) $f(x)\leqslant x$, $\forall x\in\mathbb{R}$,
(ii) $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

№14. Существует ли $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ т.ч. $f(x-f(y))\leqslant x-yf(x)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$?

Задачи для зачета.

№15. Найдите все $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ т.ч. $|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2$, $\forall x,y\in\mathbb{Q}$.

№16. Найдите все $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ т.ч. $f(yf(x)-x)=f(x)f(y)+2x$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Алгебра. Последовательности

№1. Для последовательности $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ действительных чисел выполнено: $a_1 = 2$, $a_n(n-1) = (n+1)(a_1 + \ldots a_{n-1})$, для всех $n \geqslant 2$. Найдите a_{2019}.

№2. Для последовательности $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ натуральных чисел выполнено: $(a_m, a_n) = (m, n)$, для всех $m \neq n$. Докажите, что $a_n = n$, для всех $n \in \mathbb{N}$.

№3. Последовательность $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет условию: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, $\forall n \geqslant 1$. Докажите, что для всех $n \geqslant 2$, число x_n не является полным квадратом.

№4. Докажите, что для $n \in \mathbb{N}$ число $n + [(\sqrt{2}+1)^n]$ — нечетно.

№5. Последовательность $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ удовлетворяет условию: $a_0 = a_1 = 1$ и $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$, $\forall n \geqslant 0$. Докажите, что $a_{n^2+1} = a_n a_{n+1}$, для всех $n \geqslant 0$.

№6. Пусть $\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{2^{i+1}}{3^{2^i}+1}$. Докажите, что $a_n < 1$, для всех $n \in \mathbb{N}$.

№7. Дана последовательность $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ такая, что $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \sqrt{\frac{a_n^2}{4} + \frac{1}{a_n}}$, для всех $n \geqslant 0$. Докажите, что эта последовательность неограничена.

№8. Дана последовательность $\{g(n)\}_{n\geqslant 0}$ такая, что $g(0) = 0$, $g(n+1) = n + 1 - g(g(n))$, для всех $n \geqslant 0$. Докажите, что

a) $g(n+1) \geqslant g(n)$, для всех $n \geqslant 0$.

b) Не существует $n \in \mathbb{N}$ такого, что $g(n-1) = g(n) = g(n+1)$.

№9. Последовательность $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ определена следующим образом: $a_1 = m$ и для всех $n \geqslant 2$ выполнено $a_1 + \ldots + a_k \vdots k$ и $0 \leqslant a_k < k$. Докажите, что существует натуральное M такое, что $a_k = a_{k+1}$, для всех $k \geqslant M$.

№10. Даны числа $1 = x_0 \geqslant x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots > 0$. Докажите, что существует натуральное n такое, что $\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{x_i^2}{x_{i+1}} \geqslant 3,9999$.

№11. Даны последовательности $x_1 = y_1 = \sqrt{3}$, $x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2}$, $y_{n+1} = \frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Докажите, что $2 < x_n y_n < 3$, для всех $n \geqslant 1$.

№12. Для последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ выполнено: $x_1 = 1$, $x_{n+1} \geqslant (n+2)x_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} kx_k$, для всех $n \geqslant 1$. Докажите, что существует натуральное число n такое, что $x_n > 10^{100}$.

Задачи для зачета.

№13. Даны $a_1 = 1$, $a_{2k} = 1 + a_k$ и $a_{2k+1} = 1/a_{2k}$, для всех натуральных k. Докажите, что любое положительное рациональное число встречается в этой последовательности ровно один раз.

№14. $a_0 \neq 0$ и $a_0 \neq 1$. Для всех $n \geqslant 2$, выполнено: $a_1 = 1 - a_0$, $a_{n+1} = 1 - a_n(1-a_n)$. Докажите, что $a_0 \ldots a_n(1/a_0 + \ldots + 1/a_n) = 1$, для всех $n \in \mathbb{N}$.

Комбинаторика. Множества

№1. Найдите максимальное возможное k такое, что существует $A_1, \ldots, A_k \subset \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ (n — данное число), для которых $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, $\forall 1 \leqslant i < j \leqslant n$.

№2. $A_1, A_2, \ldots, A_{2^{n-1}} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ и $A_i \cap A_j \cap A_k \neq \varnothing$, для всех $1 \leqslant i < j < < k \leqslant 2^{n-1}$. Докажите, что $A_1 \cap \ldots \cap A_{2^{n-1}} \neq \varnothing$.

№3. Даны k и n. Найдите количество последовательностей $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ таких, что $A_i \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$, и $A_1 \cap \ldots \cap A_k = \varnothing$.

№4. Дано натуральное $n \geqslant 7$. Найдите максимальное m такое, что существует $S_1, S_2, \ldots, S_m \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, что $|S_i| = 3$ и $|S_i \cap S_j| = 1$, $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant m$ $(i \neq j)$.

№5. Даны $k, n \in \mathbb{N}$, $n > k^2 - k + 1$, $|S_1| = \ldots = |S_n| = k$ и $|S_i \cap S_j| = 1$, $\forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant n$. Докажите, что $|S_1 \cap \ldots \cap S_n| = 1$.

№6. Дано $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть для всех $k = 0, 1, \ldots, n$, $p(k)$ означает количество перестановок S, которые имеют ровно k фиксированных точек. Докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot p(k) = n!$.

№7. Дано $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $A_1, \ldots, A_k \subset S$. Известно, что для любых неравных $x, y \in S$, существует $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, что ровно один из x или y лежит в A_i. Докажите, что $2^k \geqslant n$.

№8. $m, n \in \mathbb{N}$, $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. $A_1, A_2, \ldots, A_m \subset S$, что $|A_i| = 3$, $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant m$ и $|A_i \cap A_j| \leqslant 1$, $\forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant m$. Докажите, что существует $X \subset S$ такое, что $|X| = [\sqrt{2n}]$ и $A_i \not\subset X$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$.

№9. Пусть T множество всех натуральных делителей числа 2004^{100}. Какое наибольшее возможное количество элементов в подмножестве $S \subset T$, если для любых $x, y \in S$ $(x \neq y)$ верно, что x не делится на y?

№10. Дано целое $n \geqslant 2$. Докажите, что существует подмножество $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что $|A| \geqslant 2\sqrt{n} + 1$ и $\{|x - y| | x, y \in A, x \neq y\} = \{1, 2, \ldots, n - 1\}$.

Задачи для зачета.

№11. Пусть S подмножество множества $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Известно, что все суммы вида $a + b$ $(a, b \in S, a \neq b)$ попарно различны. Найдите максимум $|S|$.

№12. Даны натуральные числа n и k. Рассмотрим всевозможные k-элементные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Для каждого из них выберем наименьший элемент. Докажите, что среднее арифметическое выбранных чисел равно $(n + 1)/(k + 1)$.

Комбинаторика. Комбинаторная геометрия

№1. Дан выпуклый n-угольник. Найдите количество точек пересечения диагоналей, если никакие три не пересекаются в одной точке.

№2. На плоскости отмечено несколько точек. Докажите, что можно провести прямую так, чтобы расстояние от всех точек до неё были различными.

№3. На плоскости дано множество A из $2n$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что для любых двух различных точек $a, b \in \in A$ существует прямая, разбивающая A на два подмножества по n элементов и такая, что a и b лежат по разные стороны от этой прямой.

№4. Найдите все конечные множества S точек плоскости, содержащие не менее трех точек, удовлетворяющие следующему условию: для любых двух различных точек A и B из множества S серединный перпендикуляр к отрезку AB является осью симметрии множества S.

№5. Дано множество S из $n \geqslant 4$ точек общего положения. Докажите, что существует не менее $(n-3)(n-4)/2$ выпуклых четырехугольников с вершинами из S.

№6. Каждая точка плоскости окрашена в один из четырех цветов. Докажите, что найдутся две точки A и B одного цвета такие, что $AB = 1$ или $AB = \sqrt{3}$.

№7. По кругу стоят числа 1, 2, …, 1000. Докажите, что их можно соединить 500 непересекающимися хордами, в котором на каждой хорде, числа стоящие на концах отличается не более чем на 749.

№8. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трех цветов, причем все три цвета присутствуют. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов.

№9. Докажите, что для любого натурального N существует N точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и все попарные расстояния между которыми являются целыми числами.

Геометрия. Счет.

№1. В шестиугольнике все углы равны. Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон пересекаются в одной точке.

№2. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Обозначим через P, Q и R основания перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые BC, CA и AB соответственно. Докажите, что $PQ = QR$ тогда и только тогда, когда биссектрисы углов ABC и ADC пересекаются на прямой AC.

№3. Линия центров вписанной и описанной окружностей неравнобедренного треугольника, образует с его сторонами углы α, β, γ. Докажите, что одно из значении $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ равно сумме двух других.

№4. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AC, AB и BC в точках K, M и N соответственно. Медиана BB_1 треугольника пересекает MN в точке D. Докажите, что точка O лежит на прямой DK.

№5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ на сторонах BC и CD соответственно отмечены точки E и F такие, что $\angle BAE = \angle DAF$. Прямые DE и BF пересекаются в точке K. Пусть лежит K внутри треугольника ACF (возможно $K \in AC$). Тогда $\angle CAE = \angle FAK$.

№6. Биссектриса угла C пересекает описанную окружность треугольника ABC во второй раз в точке D. На отрезках AD и DB рассмотрим соответственно пары точек K и L, для которых $\angle ACK = \angle BCL$. Докажите, что все такие прямые KL проходят через фиксированную точку.

№7. В треугольнике ABC во внешнюю сторону построены подобные равнобедренные треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1 с основаниями AB, BC и CA соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

№8. В треугольнике ABC во внешнюю сторону построены треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1 так, что в этих треугольниках $\angle CAB_1 = \angle BAC_1$, $\angle BCA_1 = \angle ACB_1$ и $\angle CBA_1 = \angle ABC_1$. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

№9. Вписанная окружность треугольника ABC, центр который находится в точке I, касается прямых BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. На лучах IA_1, IB_1, IC_1 за точки A_1, B_1, C_1 отложили точки A_2, B_2, C_2 так, что $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

№10. Внутри стороны AB остроугольного треугольника ABC выбрана произвольная точка D. Точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных из D на стороны BC и AC соответственно. Пусть H_1 и H_2 — ортоцентры треугольников MNC и MND соответственно. Докажите, что площадь четырехугольника AH_1BH_2 не зависит от положения точки D на стороне AB.

№11. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ и $\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$. $BD \cap CE = P$. Доказать, что AP делит CD пополам.

№12. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.

№13. Точка M внутри треугольника ABC такая, что вписанные окружности треугольников ABC и AMB касаются стороны AB в одной и той же точке. Пусть эти окружности касаются сторон AC, BC, AM, BM в точках X, Y, Z, T. Докажите, что X, Y, Z, T лежат на одной окружности.

№14. Точка M лежит внутри треугольника ABC. Прямая BM пересекает сторону AC в точке N. Точка K симметрична M относительно AC. Прямая BK пересекает AC в точке P. Докажите, что если $\angle AMP = \angle CMN$, то $\angle ABP = \angle CBN$.

Геометрия. Вписанные углы и точка Микеля.

№1. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, стороны BC и AD которого равны, но не параллельны. Пусть E и F — такие внутренние точки отрезков BC и AD соответственно, что $BE = DF$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые BD и EF пересекаются в точке Q, прямые EF и AC пересекаются в точке R. Рассмотрим треугольники PQR, получаемые для всех таких точек E и F. Докажите, что окружности, описанные около всех этих треугольников, имеют общую точку, отличную от P.

№2. Пусть диагонали вписанного выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжение противоположных сторон AB и CD в точке K. Точки M и N на сторонах AB и CD соответственно такие, что выполняется равенство $AM/MB = CN/ND$. Пусть MN пересекает диагонали $ABCD$ в точках Q и R. Докажите, что описанные окружности треугольников PRQ и KMN касаются.

№3. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC соответственно взяты точки N, K и L так, что $AL = BK$ и CN – биссектриса угла C. Отрезки AK и BL пересекаются в точке P. Обозначим через I и J центры вписанных окружностей треугольников APL и BPK соответственно. Пусть Q – точка пересечения прямых CN и IJ. Докажите, что $IP = JQ$.

№4. Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K. Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK, а Q — центр вневписанной окружности треугольника CNK, касающейся стороны CN. Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q.

№5. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Описанные окружности треугольников ABO и CDO пересекаются в точке M. Прямая, проходящая через середины отрезков AB и CD, пересекает диагонали в точках K и L. Докажите, что точки K, L, M и O — вершины гармонического четырехугольника.

№6. Точки X и Y движутся с постоянными скоростями (не обязательно равными) по двум прямым, пересекающимся в точке O. Докажите, что окружность, описанная около треугольника XYO, проходит через 2 фиксированные точки O и Z, где Z является центром поворотной гомотетии, переводящий местоположения точек X в местоположения точек Y.

№7. Дан треугольник ABC и окружность с центром O, проходящая через вершины A и C и повторно пересекающая отрезки AB и BC в различных точках K и N соответственно. Окружности, описанные около треугольников ABC и KBN, имеют ровно две общие точки B и M. Докажите, что угол OMB — прямой.

Первая олимпиада

№1. Найдите количество перестановок $(a_1, a_2, \ldots, a_{2019})$ чисел $(1, 2, \ldots, 2019)$ таких, что $a_i + i \leqslant a_j + j$, для всех $1 \leqslant i < j \leqslant 2019$.

№2. На дуге AC окружности, описанной около треугольника ABC, не содержащей точки B, взята произвольная точка P. Пусть Y_1 и Y_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABP и CBP. Докажите, что окружность, описанная около треугольника Y_1Y_2P, проходит через фиксированную точку.

№3. Пусть $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ и $\{b_n\}_{n \geqslant 0}$ — две бесконечные последовательности целых чисел такие, что для любого натурального $n \geqslant 3$ выполнено

$$(a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) + (b_n - b_{n-1})(b_n - b_{n-2}) = 0.$$

Докажите, что существует $k \in \mathbb{N}$ такой, что $a_k = a_{k+2000}$.

Первая олимпиада. Решения задач

№1. Найдите количество перестановок $(a_1, a_2, \ldots, a_{2019})$ чисел $(1, 2, \ldots, 2019)$ таких, что $a_i + i \leqslant a_j + j$, для всех $1 \leqslant i < j \leqslant 2019$.

Ответ: 2^{2018}

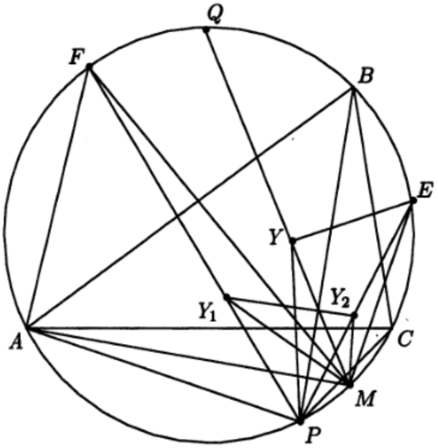
Решение. Обозначим через $f(n)$ количество всех перестановок $(1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющие условию $a_i + i \leqslant a_j + j$, для всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$. $f(1) = 1$. Если для какой-либо перестановки $a_{k+1} = n$, для какой либо $1 \leqslant k \leqslant n-1$, то $n - a_{k+2} \leqslant 1$ и $a_{k+2} = n - 1$. Рассуждая аналогично, получим $a_{k+j} = n + 1 - j$, для всех $3 \leqslant j \leqslant n - k$. Следовательно, $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ — является перестановкой $(1, 2, \ldots, k)$, удовлетворяющей условию задачи. Поэтому легко заметить, что

$$f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) = 2f(n-1),$$

или $f(n) = 2^{n-1}$. Откуда и следует ответ.

№2. На дуге AC окружности, описанной около треугольника ABC, не содержащей точки B, взята произвольная точка P. Пусть Y_1 и Y_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABP и CBP. Докажите, что окружность, описанная около треугольника Y_1Y_2P, проходит через фиксированную точку.

Решение. Пусть E и F — середины дуг BC и AB соответственно. Y — центр вписанной в ABC окружности. Известно, что $FY = FA = FY_1$ (лемма о трезубце). Точно так же $EY = EY_2 = EC$. Проведем через Y_1, Y_2 и P окружность и обозначим через M вторую точку пересечения этой окружности с окружностью, описанной около ABC. Треугольники EY_2M и FY_1M подобны ($\angle Y_2EM = \angle Y_1FM$). Значит, $EY_2/EM = EY_1/FM$, откуда $YE/EM = FA/FM$. Из последнего равенства следует подобие треугольников YEM и FAM. Таким образом, $\angle QME = \angle YME = \angle FMA = \angle BCA/2$. Т.е. точки Q и M — фиксированные точки.



№3. Пусть $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ и $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$ — две бесконечные последовательности целых чисел такие, что для любого натурального $n \geqslant 3$ выполнено

$$(a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) + (b_n - b_{n-1})(b_n - b_{n-2}) = 0.$$

Докажите, что существует $k \in \mathbb{N}$ такой, что $a_k = a_{k+2000}$.

Решение. Введём следующие последовательности: $x_n = a_n - a_{n-1}$, $y_n = b_n - b_{n-1}$, для всех $n \geqslant 2$. Тогда из условия получим $x_n(x_n + x_{n-1}) + y_n(y_n + y_{n-1}) = 0$. Следовательно,

$$x_n^2 + y_n^2 = -(x_n x_{n-1} + y_n y_{n-1}). \tag{1}$$

Обозначим $d_n = x_n^2 + y_n^2 \geqslant 0$. По неравенству КБШ имеем:

$$d_n d_{n-1} = (x_n^2 + y_n^2)(x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2) \geqslant (x_n x_{n-1} + y_n y_{n-1})^2 = d_n^2. \tag{2}$$

Из (2) следует, что $d_n \leqslant d_{n-1}$, $\forall n \geqslant 2$. Значит,

$$d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n \geqslant \ldots \geqslant 0.$$

Следовательно, $\exists M, c \in \mathbb{N}$ такие, что $d_n = c$, $\forall n \geqslant M$.

1) $c = 0$. Тогда $x_n = y_n = 0$. Откуда $a_n = a_{n-1}$, $\forall n \geqslant M$, то есть $a_n = a_{n+2000}$.

2) $c > 0$. Тогда $d_{n+1} = d_n > 0$. Следовательно, равенство (2) достигается, если, если $\exists k \in \mathbb{R}$ такое, что $x_{n+1} = kx_n$, $y_{n+1} = ky_n$. Из условия (1) следует, что $k^2 + k = 0$. Так как $k \neq 0$, то $k = -1$. Значит, $x_{n+1} = -x_n$, откуда $a_{n+1} - a_n = a_{n-1} - a_n$ или $a_{n+1} = a_{n-1}$, $\forall n \geqslant M$. Поэтому $a_{n+1} = a_{n+2001}$.

Вторая олимпиада

№1. Известно, что многочлен $P(x) = x^{2010} \pm x^{2009} \pm \ldots \pm x \pm 1$ не имеет действительных корней. Какое наибольшее количество коэффициентов $P(x)$ могут быть равны (-1)?

№2. Докажите, что для любых натуральных a и b, существуют бесконечно много натуральных n таких, что $b^n - n$ делится на a.

№3. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. Окружности ω_1 и ω_2 вписаны в треугольники ABC и ADC соответственно. Окружность Ω касается окружностей ω_1 и ω_2 внутренним образом в точках K и L соответственно. Докажите, что прямые BK и DL пересекаются на прямой AC.

Вторая олимпиада. Решения задач

№1. Известно, что многочлен $P(x) = x^{2010} \pm x^{2009} \pm \ldots \pm x \pm 1$ не имеет действительных корней. Какое наибольшее количество коэффициентов $P(x)$ могут быть равны (-1)?

Ответ: 1005. **Пример.** У многочлена $P(x) = x^{2010} - x^{2009} + x^{2008} - x^{2007} + \ldots - x + 1$ отрицательных коэффициентов ровно 1005, и этот многочлен не имеет корней. (Доказательство чуть ниже.)

Решение. Для начала, пусть $x = 1$. Тогда количество коэффициентов, равных минус единице, должно быть не больше, чем 1005. Действительно, пусть количество отрицательных коэффициентов больше 1005. Тогда $P(1) < 0$. А при $x \to +\infty$, $P(x) > 0$, то есть график многочлена $P(x)$ когда нибудь пересечет ось Ox, тем самым точка пересечения с осью Ox будет действительным корнем.

Рассмотрим многочлен $P(x) = x^{2010} - x^{2009} + x^{2008} - x^{2007} + \ldots - x + 1$. Докажем, что у этого многочлена нет действительных корней.

Если $x \leqslant 0$, то $P(x) > 0$.

Если $0 < x < 1$, то $x^{i-1} > x^i$ и $x^{2010} > 0$. Значит, $\sum\limits_{i=0}^{1004} x^{2i} > \sum\limits_{i=0}^{1004} x^{2i+1}$ и $x^{2010} > 0$, то есть $P(x) > 0$

Если $x \geqslant 1$, то $x^{i-1} \leqslant x^i$ и $1 > 0$, откуда получим $\sum\limits_{i=1}^{1005} x^{2i} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{1005} x^{2i-1}$ и $1 > 0$, следовательно, $P(x) > 0$

№2. Докажите, что для любых натуральных a и b, существуют бесконечно много натуральных n таких, что $b^n - n$ делится на a.

Решение. Докажем индукцией по a. Для $a = 1$ подходит любое натуральное n, а их бесконечно много.

Предположим, что утверждение верно для всех чисел, меньших a.

Докажем для числа a. Здесь уже предполагается, что $a \geqslant 2$. Докажем следующую лемму.

Лемма. Даны натуральные числа a и b. Тогда существует натуральное M такое, что $b^{n+\varphi(a)} \equiv b^n \pmod a$ для всех $n > M$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера.

Доказательство. Как известно, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ и $m^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$, для $(m,n) = 1$.

Пусть $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \cdot A$, где $b\vdots p_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$ и $(b, A) = 1$. Тогда при $n \geqslant \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, $b^n \vdots p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ и

$$b^{\varphi(a)} \equiv (b^{\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k})})^{\varphi(A)} \equiv 1 \pmod A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^{\varphi(a)} - 1 \equiv 0 \pmod A.$$

$$\Rightarrow b^n(b^{\varphi(a)} - 1) \equiv 0 \pmod a \Leftrightarrow b^{n+\varphi(a)} \equiv b^n \pmod a$$

Следовательно, $b^{n+\varphi(a)} \equiv b^n \pmod a$. Лемма доказана.

Продолжим решение задачи. Так как $\varphi(a) < a$, то по предположению индукции, существует бесконечно много чисел $n_1 < n_2 < \dots$, где $n_i \in \mathbb{N}$ таких, что $b^{n_i} - n_i \vdots \varphi(a)$. То есть

$$b^{n_i} - n_i = \varphi(a) \cdot t_i, \text{ здесь все } t_i \text{ — соотвествующие частные.}$$

По лемме, существует M такое, что $\forall i > M$

$$b^{n_i} \equiv b^{n_i + \varphi(a)} \equiv \dots \equiv b^{n_i + \varphi(a)\cdot t_i} \pmod a,$$

откуда

$$b^{b^{n_i}} - b^{n_i} \equiv b^{n_i + t_i \cdot \varphi(a)} - b^{n_i} \equiv 0 \pmod a,$$

то есть в качестве n можно выбрать число $b^{n_i} = n_i + t_i \cdot \varphi(a)$ подходит для любого $i > M$.

№3. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. Окружности ω_1 и ω_2 вписаны в треугольники ABC и ADC соответственно. Окружность Ω касается окружностей ω_1 и ω_2 внутренним образом в точках K и L соответственно. Докажите, что прямые BK и DL пересекаются на прямой AC.

Решение. Далее без доказательства используем следующий факт: Четырехугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников ABC и CDA касаются друг друга (см. рис. 1).

Пусть H — центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей ω в Ω (см. рис. 2). Тогда по *теореме о трех гомотетиях* для окружностей ω_1, ω и Ω, точки B, K и H лежат на одной прямой. Аналогично, H лежит на прямой DL.

Пусть k — касательная к ω_1, проведенная в точке K, l — касательная к ω_2, проведенная в точке L. Тогда k, l и AC — попарные общие касательные к ω_1, ω_2 и Ω, значит они пересекаются в одной точке Y.

Согласно выше описанному факту, в выпуклый четырехугольник, образованный прямыми AB, AD, k, l можно вписать окружность Γ. Осталось заметить, что по теореме о трех гомотетиях для окружностей Γ, ω и Ω, точки A, Y и H лежат на одной прямой.

Теорема о трех гомотетиях. *Композиция гомотетий с центрами O_1 и O_2 ($O_1 \neq O_2$) и коэффициентами k_1 и k_2 такими, что $k_1 k_2 \neq 1$, является гомотетия с центром на $O_1 O_2$ и коэффициентом $k_1 k_2$.*

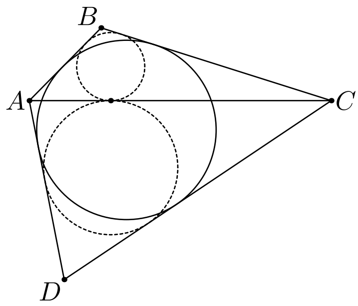


Рис. 1

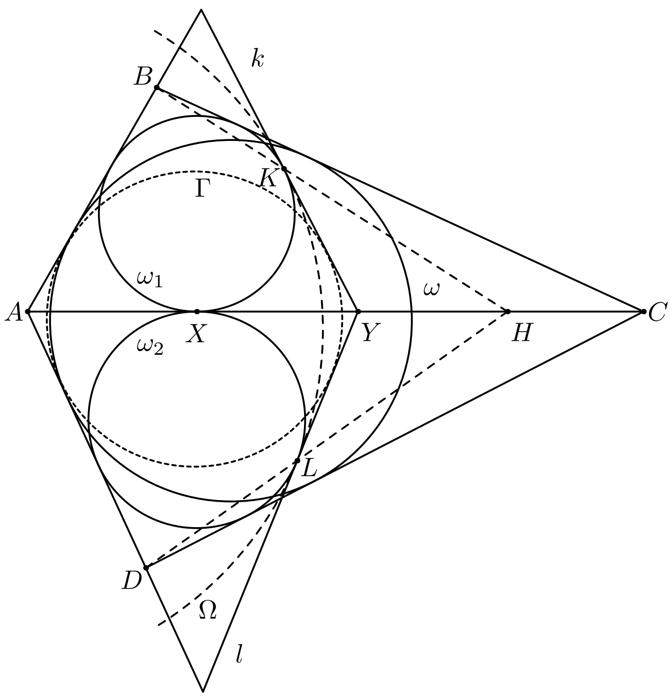


Рис. 2