Задача 32023 Темы: [Арифметическая прогрессия] [Принцип крайнего (прочее)]

Сложность: 3-
Классы: 7,8,9

а) Дано шесть натуральных чисел. Все они различны и дают в сумме 22. Найти эти числа и доказать, что других нет.

б) Тот же вопрос про 100 чисел, дающих в сумме 5051.

Решение

Расположим числа в порядке возрастания. Тогда очевидно, что каждое число будет больше своего номера. Найдем сумму номеров всех чисел: а) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$; б) $1 + 2 + \ldots + 100 = 5050$. (Последнюю сумму можно посчитать следующим способом: $(1 + 100) + (2 + 99) + \ldots + (50 + 51) = 50 \cdot 101 = 5050$.) В обоих случаях эта сумма на единицу меньше суммы самих чисел. Значит, одно число на единицу больше своего номера, а остальные — равны ему. Числом, большим своего номера, может быть только последнее. Действительно, если какое-то число больше своего номера, то все последующие числа тоже больше своего номера. Поэтому искомыми числами будут в пункте а) 1, 2, 3, 4, 5, 7; а в пункте б) — 1, 2, …, 99, 101.

Добавить Прислать комментарий

Задача 35280 Тема: [Последовательности (прочее)]

Сложность: 3-
Классы: 8,9,10

Докажите, что $1/2^2+1/3^2+1/4^2+\ldots+1/n^2<1$

Подсказка

Мостик

Сведите к доказательству неравенства $\boxed{1/(1*2)+1/(2*3)+1/(3*4)+\ldots+1/((n-1)*n)<1.}$

Решение

Увеличим дробь, заменив один множитель в знаменателе на меньшее число: $1/2^2+1/3^2+1/4^2+\ldots+1/n^2< 1/(1*2)+1/(2*3)+1/(3*4)+\ldots+1/((n-1)*n)= (1-1/2)+(1/2-1/3)+(1/3-1/4)+\ldots+(1/(n-1)-1/n)<1-1/n<1$. Заметьте, что первое число в скобке сокращается со вторым числом из предыдущей скобки.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 35403 Тема: [Алгебра и арифметика (прочее)]

Сложность: 3-
Классы: 8,9,10

Дано 100 положительных чисел, сумма которых равна S. Известно, что каждое из чисел меньше, чем S/99. Докажите, что сумма любых двух из этих чисел больше, чем S/99.

Подсказка

От противного

Замените эти два числа на их сумму.

Решение

Рассмотрим некоторые два из этих чисел. Предположим, что их сумма R не больше, чем S/99. Заменим эти два числа на их сумму. После этого получился набор из 99 чисел, сумма которых равна S, причем одно из чисел (R) не больше, чем S/99, а остальные - меньше. Но тогда сумма всех чисел меньше, чем 99*S/99=S. Тем самым, получено противоречие.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 86493 Тема: [Показательные неравенства]

Сложность: 3-
Классы: 8,9,10

Расположите в порядке возрастания числа: 222^2; 22^{22}; 2^{222}; 22^{2^2}; 2^{22^2}; $2^{2^{22}}$; $2^{2^{2^2}}$. Ответ обоснуйте.

Решение

Мостики, арифметика

Сначала рассмотрим показатели степеней с основанием 2 и сравним их: $2^{2^2} = 2^4 = 16 < 222 < 22^2 = 484 < 512 = 2^9 < 2^{22}$.

Следовательно, $2^{2^{2^2}} < 2^{222} < 2^{22^2} < 2^{2^{22}}$.

Затем оценим остальные степени: $22^{2^2} = 22^4 > 16^4 = 2^{16} = 2^{2^{2^2}}$ и $22^{2^2} = 22^4 < 22^{22} < 64^{37} = (2^6)^37 = 2^{222}$; $222^2 < 256^2 = 2^{16} = 2^{2^{2^2}}$.

Ответ

$222^2 < 2^{2^{2^2}} < 22^{2^2} < 22^{22} < 2^{222} < 2^{22^2} < 2^{2^{22}}$.

Добавить Прислать комментарий

Задача [88263] Тема: [Десятичная система счисления]

Сложность: 3-
Классы: 5,6,7

Написано 1992-значное число. Каждое двузначное число, образованное соседними цифрами, делится на 17 или на 23. Последняя цифра числа 1. Какова первая?

Конструкции

Подсказка

Попробуйте рассмотреть все двузначные числа, делящиеся на 17 или 23. Вспомните задачу 41.

Решение

Выпишем все двузначные числа, делящиеся на 17 или 23. Это 17, 34, 51, 68, 85, 23, 46, 69, 92. У всех этих чисел последние цифры различны, значит, искомое число мы сможем восстановить однозначно. Последняя цифра 1, значит, соответствующее двузначное число 51, т.е. предыдущая цифра в числе 5. Эта цифра 5 соответствует двузначному числу 85, следовательно, перед ней стоит цифра 8. Рассуждая аналогично, получим ряд из девяти последних цифр числа: 692346851. Набор 92346 будет теперь всё время повторяться. Всего же цифр 1992, в том числе: 3 последние, наши 5 цифр из периода, встречающиеся 397 раз, и ещё 4 цифры — последние 4 цифры периода, они же — первые 4 цифры числа. Таким образом, первая цифра искомого числа 2.

Ответ

Цифра 2.

Задача 105121 Темы: [Десятичная система счисления] [Перебор случаев]

Сложность: 3-
Классы: 7,8,9

Автор: Блинков А.Д.

Квадрат суммы цифр числа A равен сумме цифр числа A^2. Найдите все такие двузначные числа A.

Решение

Неравенство в ТЧ

Ответ: 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31.

Решение 1. Заметим, что $A^2 \le 99^2 = 9801 < 9999$. Поэтому сумма цифр A^2 меньше 9*4=36. Так как она равна квадрату суммы цифр A, то сумма цифр A меньше $36^{1/2}=6$, то есть меньше или равна 5. Остаётся 15 вариантов: 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 40, 41, 50, из которых условию удовлетворяют только 9 вариантов, указанных в ответе.

Решение 2. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n. Заметим, что при сложении двух чисел "столбиком" возможен только перенос единицы в старший разряд, и каждый такой перенос уменьшает сумму цифр на 9. Поэтому сумма цифр суммы любого количества слагаемых не превосходит суммы цифр слагаемых. Как следствие, $S(n) \le n$, так как $n=1+1+...+1$ (n единиц), причём равенство достигается лишь для однозначных чисел, ведь при прибавлении очередной единицы к сумме девяти единиц уже возникнет перенос. Кроме того, от дописывания справа нуля сумма цифр не меняется, то есть $S(10n)=S(n)$.

Пусть искомое двузначное число $A=\underline{ab}=10a+b$. Тогда

$S(A^2)=S((10a+b)^2)=S(100a^2+10*2ab+b^2) \le$

$\le S(100a^2)+S(10*2ab)+S(b^2)=S(a^2)+S(2ab)+S(b^2) \le$

$\le a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(S(A))^2$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда a^2, $2ab$ и b^2 - однозначные числа (если это так, то при сложении $100a^2$, $10*2ab$ и b^2 переносов не происходит, так как они содержат все свои ненулевые цифры в разных разрядах).

Итак, необходимо и достаточно, чтобы числа a^2, b^2 и $2ab$ были меньше 10, то есть $1 \le a \le 3$, $0 \le b \le 3$ и $ab \le 4$.

Отсюда находим все перечисленные в ответе варианты.

Добавить Прислать комментарий

Задача 107804 Темы: [Свойства модуля. Неравенство треугольника] [Принцип крайнего (прочее)]

Сложность: 3-
Классы: 7,8,9

Автор: Галочкин А.И.

Докажите, что если для чисел a, b и c выполняются неравенства $|a - b| \geq |c|$, $|b - c| \geq |a|$, $|c - a| \geq |b|$, то одно из этих чисел равно сумме двух других.

Разобрать оба решения

Решение

Первый способ. Предположим, сначала, что одно из чисел равно нулю. Пусть, например, $a = 0$ (остальные случаи аналогичны). Тогда получим неравенства: $|b| \geq |c|$ и $|c| \geq |b|$, откуда $|b| = |c|$, т. е. $b = c$ или $b = -c$. В первом случае $b = a + c$, во втором $a = b + c$.

Все доказано.

Пусть теперь ни одно из чисел a, b и c не равно нулю. Без ограничения общности можно считать, что число a — максимальное по модулю среди чисел a, b и c (т. е. $|a| \geq |b|$, $|a| \geq |c|$). Также можно считать, что $a > 0$ (в противном случае произведем замену: $a = -a_1$, $b = -b_1$, $c = -c_1$). Тогда $|a| = a$, $|a - b| = a - b$, $|a - c| = a - c$.

При этих предположениях из неравенства $|b - c| \geq |a|$ следует, что числа b и c не могут иметь одинаковых знаков (подумайте, почему).

Возможны два случая.

1°. $b > 0$, $c < 0$. Тогда $|b| = b$, $|c| = -c$ и $|b - c| = b - c$, так что мы получаем неравенства $a - b \geq -c$, $b - c \geq a$, $a - c \geq b$. Из первого неравенства следует, что $b \leq a + c$, из второго — что $b \geq a + c$, значит, $b = a + c$.

2°. $b < 0$, $c > 0$. Тогда, аналогично предыдущему случаю, получим неравенства $a - b \geq c$, $c - b \geq a$, $a - c \geq -b$. Следовательно, в этом случае одновременно выполняются неравенства $c \geq a + b$, $c \leq a + b$, т. е. $c = a + b$. Таким образом, в обоих случаях утверждение доказано.

Второй способ. Возведем неравенство $|a - b| \geq |c|$ в квадрат и перенесем все члены в левую часть, получим $(a - b)^2 - c^2 \geq 0$.

Разложив левую часть на множители по формуле разности квадратов, получим: $(a - b - c)(a - b + c) \geq 0$, или, что то же самое,

$$(a - b - c)(b - c - a) \leq 0.$$

Аналогично получаем, что произведения $(b - c - a)(c - a - b)$ и $(c - a - b)(a - b - c)$ также неположительны.

Перемножая эти произведения находим, что

$$(a - b - c)^2(b - c - a)^2(c - a - b)^2 \leq 0.$$

Мы видим, что произведение неотрицательных чисел не превосходит 0, значит, одно из этих чисел равно 0, откуда следует требуемое утверждение.

Задача [109462] Темы: [Десятичная система счисления] [Перебор случаев]

Сложность: 3-
Классы: 7,8,9

Из натурального числа вычли сумму его цифр и получили 2007. Каким могло быть исходное число?

Решение

Несложно убедиться, что искомое число должно быть четырехзначным. Пусть оно равно $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$. Тогда $1000a+100b+10c+d-(a+b+c+d)=999a+99b+9c=9(111a+11b+c)$. Получим уравнение: $9(111a+11b+c)=2007 \Leftrightarrow 111a+11b+c=223$. Перебором убеждаемся, что $a>1$ и $a<3$, то есть, $a=2$. Тогда $11b+c=1$. Поскольку b и c – цифры, то $b=0$ и $c=1$. Отметим, что d может быть любой цифрой.

Ответ

любое натуральное число от 2010 до 2019.

Задача 21994 Темы: [Числовые таблицы и их свойства]
[Принцип Дирихле (прочее)]

Сложность: 3-
Классы: 7,8

В таблице 10×10 расставлены целые числа, причём каждые два числа в соседних клетках отличаются не более чем на 5. Докажите, что среди этих чисел есть два равных.

Решение

Поскольку от каждой клетки до любой другой можно добраться, не более 19 раз сдвинувшись в соседнюю клетку, то все числа находятся между числами a и $a + 95$, где a – минимальное из всех расставленных чисел. Значит, среди этих чисел не более 96 различных.

Добавить

Прислать комментарий

Задача [30307] Темы: [Четность и нечетность] [Измерение длин отрезков и мер углов. Смежные углы.]

Сложность: 3-
Классы: 6,7,8

На прямой отмечено 45 точек, лежащих вне отрезка AB. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки A не равна сумме расстояний от этих точек до точки B.

Решение

Примем длину отрезка AB за 1. Для каждой точки разность между расстоянием от неё до A и расстоянием от неё до AB равна ± 1. Разность между указанными суммами расстояний равна сумме этих 45 разностей. Но сумма нечётного количества чисел ± 1 нечётна, то есть не равна нулю.

Задача 30604 Темы: [Деление с остатком] [Классическая комбинаторика (прочее)] [Перебор случаев]

Сложность: 3-
Классы: 7,8,9

Сколько существует натуральных чисел n, меньших 10000, для которых $2^n - n^2$ делится на 7?

Решение

Остатки от деления 2^n на 7 повторяются с периодом 3: 2, 4, 1. Остатки от деления n^2 на 7 повторяются с периодом 7: 1, 4, 2, 2, 4, 1, 0. Поэтому делимость на 7 зависит только от остатка при делении n на 21. Рассмотрим все случаи (в первой строке таблицы – остатки от деления на 21, в следующих двух – остатки от деления на 7).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0
2^n	2	**4**	1	**2**	**4**	**1**	2	4	1	**2**	4	1	2	4	**1**	2	4	1	2	4	1
n^2	1	**4**	2	**2**	**4**	**1**	0	1	4	**2**	2	4	1	0	**1**	4	2	2	4	1	0

Мы видим 6 случаев совпадений (когда $n \equiv 2, 4, 5, 6, 10, 15 \pmod{21}$). $10000 = 476\cdot 21 + 4$. Поэтому количество "подходящих" чисел равно $476\cdot 6 + 2 = 2858$.

Ответ

2858 чисел.

Задача 32780 Тема: [Арифметика. Устный счет и т.п.]

Сложность: 3-
Классы: 7,8

В строчку написано 37 чисел так, что сумма каждых шести подряд идущих чисел равна 29. Первое число 5. Каким может быть последнее число?

Решение

$\boxed{\text{Сумма 36 первых чисел равна } 6\cdot 29}$, сумма последних 36 чисел – тоже. Значит, последнее число равно первому.

Ответ

5.

Задача 32821 Тема: [Арифметика. Устный счет и т.п.]

Сложность: 3-
Классы: 7,8,9

Фальшивомонетчик Вася стал выпускать золотые слитки. Сделав пять таких слитков, он замерил вес каждой пары. Получились величины в 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120 и 121 унцию. Сколько весит каждый брусок?

Решение

Заметим, что веса любых двух слитков различны, поскольку все приведенные суммы различны. Обозначим веса слитков через x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5, причем $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$.

Сумма весов слитков равна сумме приведенных чисел, деленной на 4, т.е. 1156/4=289 унций. Поскольку мы упорядочили слитки, то, очевидно, выполняются равенства:

$x_1+x_2=110$,

$x_1+x_3=112$,

$x_3+x_5=120$,

$x_4+x_5=121$.

Складывая первое и последнее равенство, получим $x_1+x_2+x_4+x_5=231$, следовательно, $x_3=289-231=58$ унций. Теперь последовательно находим $x_1=112-58=54$, $x_2=110-54=56$, $x_5=120-58=62$, $x_4=121-62=59$ унций.

Ответ

54, 56, 58, 59 и 62 унции.

Задача 32825 Темы: [Турниры и турнирные таблицы]
[Соображения непрерывности]

Сложность: 3-
Классы: 7,8,9

Сборная России по футболу выиграла у сборной Туниса со счетом $9:5$. Докажите, что по ходу матча был момент, когда сборной России оставалось забить столько голов, сколько уже забила сборная Туниса.

Решение

Рассмотрим тот момент матча, когда всего было забито 9 голов. Пусть сборная России к этому моменту забила n мячей; тогда Тунис забил
$9 - n$ мячей. Но России осталось забить как раз $9 - n$ мячей, что и требовалось доказать.

Добавить Прислать комментарий

Задача 35067 Тема: [Системы линейных уравнений]

Сложность: 3-
Классы: 8,9

На доске написано несколько положительных чисел, каждое из которых равно полусумме остальных. Сколько чисел написано на доске?

Решение

Если число равно полусумме остальных, то оно равно трети общей суммы. Следовательно, все числа равны и их три.

Ответ

Три числа.

Задача 35270 Тема: [Алгебраические неравенства (прочее)]

Сложность: 3-
Классы: 8,9,10

Найти наименьшее значение дроби $\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Преобразование выражений

Решение

$\frac{x^2-1}{x^2+1}=1-\frac{2}{x^2+1}$. Правая часть наименьшая, когда знаменатель дроби наименьший, то есть при $x=0$.

Задача 35466 Темы: [Последовательности (прочее)]
[Доказательство от противного]

Сложность: 3-
Классы: 7,8,9

Даны 20 различных натуральных чисел, меньших 70. Докажите, что среди их попарных разностей найдутся четыре одинаковых.

Подсказка

Расположите числа в порядке возрастания и предположите противное - среди разностей между последовательными числами нет четырех различных.

Решение

Обозначим числа через a_1, a_2, ... , a_{20} в порядке возрастания, таким образом $a_1<a_2<...<a_{20}$. Допустим, что условие задачи не выполняется. Тогда среди 19 разностей $d_1=a_2-a_1$, $d_2=a_3-a_2$, ... , $d_{19}=a_{20}-a_{19}$ не больше трех разностей принимают значение 1, не больше трех разностей принимают значение 2, и т.д. Отсюда можно сделать вывод о том, что сумма всех 19 разностей $d_1+d_2+...+d_{19}$ $= a_{20}-a_1$ не меньше, чем $(1+1+1)+(2+2+2)+(3+3+3)+(4+4+4)+(5+5+5)+(6+6+6)+7=70$. Однако разность $a_{20}-a_1$, очевидно, меньше 70, так как числа a_{20} и a_1 - натуральные, меньшие 70. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения задачи.

Задача 35663 Темы: [Четность и нечетность]
[Подсчет двумя способами]

Сложность: 3-
Классы: 8,9

В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены числа от 1 до 100. Пусть S_1, S_2, ..., S_{10} – суммы чисел, стоящих в столбцах таблицы.
Могло ли оказаться так, что среди чисел S_1, S_2, ..., S_{10} каждые два соседних различаются на 1?

Подсказка

От противного

Если бы условие выполнялось, то в последовательности S_1, S_2, ..., S_{10} чётные и нечётные числа строго чередовались бы.

Решение

Если S_i и S_{i+1} различаются на 1, то эти два числа имеют разную чётность, то есть в последовательности S_1, S_2, ..., S_{10} чётные и нечётные числа строго чередуются. Значит, среди чисел S_1, ..., S_{10} ровно пять чётных и пять нечётных. Отсюда следует, что сумма $S_1 + ... + S_{10}$ нечётна. С другой стороны,
$S_1 + ... + S_{10} = 1 + 2 + ... + 100$, а в этой сумме 50 нечётных слагаемых, поэтому она чётна. Противоречие.

Ответ

Не могло.

Задача 77946 Тема: [Неравенства с модулями]

Сложность: 3-
Классы: 10,11

Доказите, что

$$\left| \frac{x-y}{1-xy} \right| < 1,$$

если $|x| < 1$ и $|y| < 1$.

Решение

По условию $1 - x > 0$, $1 + x > 0$, $1 - y > 0$ и $1 + y > 0$. Поэтому $\boxed{(1 - x)(1 + y) > 0 \text{ и } (1 + x)(1 - y) > 0}$, т.е. $1 - x + y - xy > 0$ и $1 + x - y - xy > 0$. Следовательно, $1 - xy > x - y$ и $1 - xy > y - x$. Кроме того, $1 - xy = |1 - xy|$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 98127 Тема: [Линейные неравенства и системы неравенств]

Сложность: 3-
Классы: 7,8,9

Автор: Шлейфер Р.

n чисел $(n > 1)$ называются *близкими*, если каждое из них меньше чем сумма всех чисел, делённая на $n - 1$. Пусть $a, b, c, \ldots$ – n близких чисел, S – их сумма. Докажите, что

а) все они положительны;

б) $a + b > c$;

в) $a + b > S/_{n-1}$.

Мостик

Решение

Положим $\boxed{s = S/_{n-1}.}$

а) $a = S - (b + c + \ldots) > S - (n - 1)s = 0.$

в) $a + b = S - (c + \ldots) > S - (n - 2)s = s.$

б) Согласно в) $a + b \geq s > c.$

Добавить Прислать комментарий

Задача 98346 Тема: [НОД и НОК. Взаимная простота]

Сложность: 3-
Классы: 7,8,9,10

Автор: Френкин Б.Р.

a и b – натуральные числа. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на ab. Докажите, что $a = b$.

Мостик

Решение

Пусть $d =$ НОД(a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b, $a = du$, $b = dv$. Сокращая на d^2, получим, что $u^2 + v^2$ делится на uv. Но
НОД$(u^2 + v^2, uv) = 1$, так как u и v взаимно просты. Следовательно, $uv = 1$. Значит, $u = v = 1$, $a = b = d$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 103871 Тема: [Признаки делимости на 3 и 9]

Сложность: 3-
Классы: 6,7

Автор: Произволов В.В.

На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002.
Какие числа остались на доске?

Мостик

Решение

Пусть x – наименьшее из написанных чисел. Обозначим через $x + y$ вычеркнутое число $(0 < y < 9)$. Тогда $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) + (x + 5) + (x + 6) + (x + 7) + (x + 8) + (x + 9) – (x + y) = 2002$, то есть $9x = 1957 + y$. $1957 + y$ делится на 9 только при $y = 5$. Значит, $x = 1962 : 9 = 218$.

Ответ

218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226 и 227.

Задача 116646 Тема: [Числовые неравенства. Сравнения чисел.]

Сложность: 3-
Классы: 9,10,11

Автор: Голованов А.С.

Два делителя

Натуральные числа d и $d' > d$ – делители натурального числа n. Докажите, что $d' > d + d^2/n$.

Решение

Числа n/d и n/d' целые, поэтому $1 \le \frac{n}{d} - \frac{n}{d'} = \frac{(d'-d)n}{dd'} < \frac{(d'-d)n}{d^2}$. . Домножая на d^2/n, получаем $d' - d > d^2/n$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 30288 Темы: [Четность и нечетность] [Ломаные] Сложность: 3 Классы: 5,6,7

Можно ли нарисовать девятизвенную замкнутую ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

Решение

Если ломаная пересекает каждое свое звено один раз, то её звенья разбиваются на пары (в пару входят звенья, пересекающие друг друга). Значит, их число чётно, что противоречит условию.

Ответ

Нельзя.

Задача 30303 Темы: [Четность и нечетность]
[Процессы и операции]
[Инварианты]

Сложность: 3
Классы: 6,7

На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 1984, 1985. Разрешается стереть с доски любые два числа и вместо них записать модуль их разности. В конце концов на доске останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

Подсказка

При указанных операциях чётность суммы всех написанных на доске чисел не меняется.

Решение

Модуль разности двух целых чисел имеет ту же чётность, что и сумма этих чисел. Поэтому, при указанной замене чётность суммы всех чисел не меняется. Сумма целых чисел от 1 до 1985 нечётна (среди них нечётное количество нечётных чисел). Поэтому она не может стать равной нулю.

Ответ

Не может.

Сложность: 3
Классы: 7,8,9

Задача 30383 Тема: [Арифметика остатков (прочее)]

Докажите, что сумма квадратов трёх натуральных чисел, уменьшенная на 7, не делится на 8.

Подсказка

Выясните возможные остатки квадратов при делении на 8.

Решение

Квадрат при делении на 8 может дать остаток 0, 1 или 4. Число 7 нельзя представить как сумму трёх таких слагаемых.

Задача 30614 Тема: [Десятичная система счисления]

Сложность: 3
Классы: 7,8

Предпоследняя цифра квадрата натурального числа – нечётная. Докажите, что его последняя цифра – 6.

Нечетная предпоследняя цифра квадрата

Решение

Пусть $n = \overline{...ab}$. Тогда $n^2 \equiv (10a + b)^2 \equiv 20ab + b^2 \pmod{10}$. Из условия следует, что цифра десятков числа b^2 нечётна. Прямой перебор показывает, что тогда цифра единиц равна 6.

Задача 30642 Тема: [Десятичная система счисления]

Сложность: 3
Классы: 7,8

Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.

Решение

Упрощенная запись чисел в десятичном виде

Запишем наше число в виде $10a + b$, где b - цифра единиц. Получим уравнение $100a + b = 9(10a + b)$. Отсюда $10a = 8b$, т.е. $5a = 4b$. Таким образом, b делится на 5. Рассмотрев два случая $b = 0$, $b = 5$, получаем единственный ответ: 45.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 30867 Тема: [Неравенство Коши]

Сложность: 3
Классы: 9

$a, b, c \geq 0$. Докажите, что $ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$.

Замена

Решение

После замены $ab = x^2$, $bc = y^2$, $ca = z^2$ получим неравенство из задачи 30865.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 30875 Тема: [Неравенство Коши]

Сложность: 3
Классы: 6,7

Докажите, что при $a, b, c > 0$ имеет место неравенство $^{ab}/_{c} + {}^{ac}/_{b} + {}^{bc}/_{a} \geq a + b + c$.

Решение

После замены $^{ab}/_{c} = x^2$, $^{ac}/_{b} = y^2$, $^{bc}/_{a} = z^2$ получим неравенство из задачи 30865.

Добавить Прислать комментарий

Задача 30896 Тема: [Алгебраические неравенства (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 8

n – натуральное число. Докажите, что $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$.

Мостик, телескоп

Решение

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}<1+\frac{2}{\sqrt{2}+1}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+...+\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=$$
$$=1+2(\sqrt{2}-1)+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+...+2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=2\sqrt{n}-1.$$

Добавить

Прислать комментарий

Задача 30899 [Неравенство Бернулли] Темы: [Классические неравенства (прочее)] [Индукция (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 7,8,9

$x \geq -1$, n – натуральное число. Докажите, что $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Решение

Бернулли

Докажем неравенство индукцией по n.

База. При $n = 1$ неравенство превращается в равенство.

Шаг индукции. Пусть уже доказано, что $(1+x)^n \geq 1+nx$. Тогда $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 30903 Темы: [Алгебраические неравенства (прочее)]
[Индукция (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 7,8

При каких натуральных n выполняется неравенство $2^n \geq n^3$?

Степенная функция всегда перебьет многочлен, начиная с какого то n

Решение

$2^9 = 526 < 729 = 9^3$.

Докажем индукцией по n, что $2^n > n^3$ при $n > 9$. *База* $(n = 10)$ очевидна.

Шаг индукции. $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^3 > (n+1)^3$. В самом деле, $\frac{(n+1)^3}{n^3} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = 1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} < 2$ при $n > 9$.

Ответ

При $n \geq 10$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 30906 Тема: [Неравенство Коши]

Сложность: 3
Классы: 6,7

Произведение положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n равно 1. Докажите, что $(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) \geq 2^n$.

Коши, классика

Решение

Согласно *неравенству Коши* $(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) \geq 2\sqrt{a_1} \cdot 2\sqrt{a_2} \cdot ... \cdot 2\sqrt{a_n} = 2^n$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 30925 Темы: [Алгебраические неравенства (прочее)] [Перебор случаев]

Сложность: 3
Классы: 6,7

$x, y > 0$. Через S обозначим наименьшее из чисел x, $1/y$, $y + 1/x$. Какое максимальное значение может принимать величина S?

Решение

Мостик sqrt2

Если $x \le \sqrt{2}$, то и $S \le \sqrt{2}$. Если $y \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $S \le y \le \sqrt{2}$. Если $x > \sqrt{2}$, $y < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $S \le y + \frac{1}{x} < \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Следовательно, $S \le \sqrt{2}$. Равенство достигается при $x = \frac{1}{y} = \sqrt{2}$.

Ответ

$\sqrt{2}$.

Задача 31263 Тема: [Арифметика остатков (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 6,7,8

Доказать, что $3^n + 1$ не делится на 10100.

Мостик, делимость на 8

Подсказка

Оно не делится даже на 8.

Решение

$3^{2k} + 1 = 9^k + 1 \equiv 1^k + 1 = 2 \pmod 8$.
$3^{2k+1} + 1 = 3 \cdot 9^k + 1 \equiv 4 \pmod 8$.

Добавить Прислать комментарий

Задача 31265 Тема: [Арифметика остатков (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 6,7,8

m и n взаимно просты, b – произвольное целое число. Доказать, что числа b, $b+n$, $b+2n$, ..., $b+(n-1)n$ дают все возможные остатки по модулю m.

Полная система вычетов

Подсказка

См. задачи 60732 и 60733.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 34929 Тема: [Арифметическая прогрессия] Сложность: 3

Натуральный ряд разбит на n арифметических прогрессий (каждое натуральное число принадлежит ровно одной из этих n прогрессий). Пусть $d_1, d_2, \dots, d_n$ – разности этих прогрессий. Докажите, что $1/d_1 + 1/d_2 + \dots + 1/d_n = 1$.

Подсказка

Конструкции в прогрессиях

В длинном куске натурального ряда числа из первой прогрессии составляют долю, равную примерно $1/d_1$.

Решение

Положим $N = d_1d_2 \dots d_n$. Возьмём N последовательных натуральных чисел, меньшее из которых больше всех первых членов n прогрессий. Тогда среди этих N чисел ровно N/d_1 чисел принадлежат первой прогрессии, ровно N/d_2 – второй, и т.д., ровно N/d_n – n-й прогрессии. Поскольку каждое из этих N чисел принадлежит ровно одной прогрессии, отсюда следует нужное равенство.

Добавить Прислать комментарий

Задача 34979 Темы: [Средние величины]
[Разбиения на пары и группы; биекции]
[Доказательство от противного]

Сложность: 3
Классы: 7,8

Имеется набор натуральных чисел (известно, что чисел не меньше семи), причём сумма каждых семи из них меньше 15, а сумма всех чисел из набора равна 100. Какое наименьшее количество чисел может быть в наборе?

Решение

Мостик

Набор из 50 чисел, каждое из которых равно 2, удовлетворяет условию.

Если в наборе не более 49 чисел, то их можно разбить на 7 групп так, что в каждой группе будет содержаться 7 или меньше чисел. По условию сумма чисел в каждой группе меньше 15, то есть не больше 14. Следовательно, сумма чисел во всех семи группах не больше $7 \cdot 14 = 98$, что меньше 100. Противоречие.

Ответ

50 чисел.

Задача 34993 Темы: [Основная теорема арифметики. Разложение на простые сомножители] [Разбиения на пары и группы; биекции] [Классическая комбинаторика (прочее)] [Теория множеств (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Докажите, что нечётное число, являющееся произведением n различных простых сомножителей, можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел ровно 2^{n-1} различными способами.

Подсказка

2^{n-1} – это число способов разбить множество из n простых сомножителей на два подмножества.

Решение

Пусть $m = p_1p_2...p_n$, где $p_1, p_2, ..., p_n$ – различные нечётные простые числа. Будем решать уравнение $x^2 - y^2 = m$ в натуральных числах. Это уравнение приводится к виду $(x-y)(x+y) = p_1p_2...p_n$, откуда следует, что сомножитель $x-y$ есть произведение нескольких чисел (возможно ни одного, в этом случае $x-y=1$) из набора $p_1, p_2, ..., p_n$, а сомножитель $x+y$ есть произведение оставшихся чисел из этого набора. При этом сомножителю $x-y$ соответствует меньшее произведение. Таким образом, каждому решению (x, y) соответствует разбиение множества из n чисел на два подмножества.

Наоборот, пусть есть некоторое разбиение чисел $p_1, p_2, ..., p_n$ на два подмножества. Обозначим через t и s $(t < s)$ произведения чисел в этих подмножествах ($t \neq s$, поскольку числа $p_1, p_2, ..., p_n$ различны). Тогда найдётся единственная пара натуральных чисел $(x, y) = \left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right)$, для которой $x-y=t$ и $x+y=s$ (x и y натуральные, так как t и s нечётны).

Итак, число представлений m в виде разности квадратов двух натуральных чисел равно числу способов разбить множество из n элементов на два подмножества, то есть 2^{n-1} (в два раза меньше числа 2^n всех подмножеств).

Задача 35037 Темы: [Уравнения в целых числах]
[Раскладки и разбиения]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

В обращении есть монеты достоинством в 1, 2, 5, 10, 20, 50 копеек и 1 рубль. Известно, что k монетами можно набрать m копеек. Докажите, что m монетами можно набрать k рублей.

Конструкции

Подсказка

Для каждой монеты достоинством в n коп. есть монета достоинством в $^{100}/_{n}$ коп.

Решение

Пусть среди k монет, дающих в сумме m копеек, есть a_1 монет по 1 коп., a_2 – по 2 коп., a_3 – по 5, a_4 – по 10, a_5 – по 20, a_6 – по 50 коп. и a_7 – по 1 рублю. Тогда

$$a_1 + 2a_2 + 5a_3 + 10a_4 + 20a_5 + 50a_6 + 100a_7 = m;$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = k.$$

Умножим второе равенство на 100 и запишем его в виде:

$$100a_1 + 50\cdot 2a_2 + 20\cdot 5a_3 + 10\cdot 10a_4 + 5\cdot 20a_5 + 2\cdot 50a_6 + 100a_7 = 100k.$$

Отсюда следует, что если взять $100a_7$ монет по 1 коп., $50a_6$ – по 2, $20a_5$ – по 5, $10a_4$ – по 10, $5a_3$ – по 20, $2a_2$ – по 50 коп. и a_1 монет по 1 рублю, то в сумме они дадут $100k$ копеек, то есть k рублей. А согласно первому равенству монет будет m.

Добавить Прислать комментарий

Задача 35261 Темы: [Делимость чисел. Общие свойства]
[Подсчет двумя способами]

Сложность: 3
Классы: 6,7,8

Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на **5**. Докажите, что каждое из этих чисел делится на **5**.

Подсказка

Докажите, что сумма всех семи чисел делится на 5.

Мостик

Решение

Пусть данные числа a, b, c, d, e, f, g, а S – их сумма. По условию числа $S-a$, $S-b$, $S-c$, $S-d$, $S-e$, $S-f$, $S-g$ делятся на 5. Значит, и их сумма,
$7S-S=6S$ делится на 5. Но тогда и S делится на 5, а значит, на 5 делятся и числа $a=S-(S-a)$, ..., $g=S-(S-g)$.

Задача 35308 Тема: [Суммы числовых последовательностей и ряды разностей]

Сложность: 3
Классы: 8,9

Обратите внимание, что значение $1!\cdot 1 + 2!\cdot 2 + 3!\cdot 3 + \ldots + n!\cdot n$ равно 1, 5, 23, 119 для $n = 1, 2, 3, 4$ соответственно. Установите общий закон и докажите его.

Подсказка

Телескоп

$(n + 1)! = n!\cdot(n + 1)$.

Решение

Воспользуемся равенством $n!\cdot n = (n + 1)! - n!$ и преобразуем данное выражение:
$1!\cdot 1 + 2!\cdot 2 + 3!\cdot 3 + \ldots + n!\cdot n = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \ldots + ((n + 1)! - n!) = (n + 1)! - 1$.

Задача 35367 Тема: [Уравнения в целых числах]

Сложность: 3
Классы: 9,10,11

Докажите, что уравнение $x^x + 2y^y = z^z$ не имеет решений в натуральных числах.

Подсказка

Если $z > x$ и $z > y$, то правая часть уравнения больше левой.

Неравенства в уравнениях в целых числах

Решение

Заметим, что $z > x$ и $z > y$ (иначе левая часть больше правой). Таким образом, левая часть не превосходит числа $(z-1)^{z-1} + 2(z-1)^{z-1} = 3(z-1)^{z-1}$. Если $z \geq 3$, то $3(z-1)^{z-1} < z \cdot z^{z-1} = z^z$, то есть левая часть меньше правой. Если же $z = 2$, то $3(z-1)^{z-1} = 3$, а $z^z = 4$, и снова левая часть меньше правой.

Задача 35373 Тема: [Рекуррентные соотношения]

Сложность: 3
Классы: 9,10,11

Дана последовательность чисел x_1, x_2, ... Известно, что $0<x_1<1$ и $x_{k+1}=x_k-x_k^2$ для всех $k>1$. Докажите, что $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2<1$ для любого $n>1$.

Подсказка

Рекуррентная формула, задающая последовательность, позволяет выразить квадрат члена последовательности через разность двух членов последовательности.

Телескоп

Решение

Поскольку квадрат положительного числа, меньшего 1, меньше самого числа, то из условия $0<x_1<1$ и рекуррентной формулы последовательно получаем, что $0<x_2<1$, $0<x_3<1$, и т.д. Далее, по условию $\boxed{x_k^2=x_k-x_{k+1}}$, поэтому выражение $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2$ можно переписать в виде $(x_1-x_2)+(x_2-x_3)+...+(x_n-x_{n+1})$, что равно x_1-x_{n+1}. Так как $x_1<1$ и $x_{n+1}>0$, то x_1-x_{n+1} меньше 1, что и требовалось доказать.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 35468 Тема: [Числа Фибоначчи]

Сложность: 3
Классы: 8,9

Найдите количество слов длины 10, состоящих только из букв "а" и "б" и не содержащих в записи двух букв "б" подряд.

Подсказка

Обозначьте за a_n количество слов длины n, состоящих только из букв "а" и "б" и не содержащих в записи двух букв "б" подряд. В последовательности a_1, a_2, ..., a_n выразите каждый следующий член через предыдущие.

Решение

Фибоначчи

Обозначим за a_n количество слов длины n, состоящих только из букв "а" и "б" и не содержащих в записи двух букв "б" подряд. Таким образом, находим $a_1=2$, $a_2=3$. Покажем, что a_n можно выразить через a_{n-1} и a_{n-2}. Количество слов длины n, не содержащих в записи двух букв "б" подряд и начинающихся с буквы "а", равно a_{n-1}, так как после первой буквы может следовать любое слово длины n-1, не содержащее двух "б" подряд. Пусть слово длины n начинается с буквы "б". Если в этом слове нет двух "б" подряд, то вторая буква - "а", а далее может следовать любое слово длины n-2, не содержащее двух "б" подряд. Таким образом, количество слов длины n, не содержащих в записи двух букв "б" подряд и начинающихся с буквы "б", равно a_{n-2}. Тем самым, мы показали, что $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$. Теперь последовательно вычисляем $a_3=a_2+a_1=3+2=5$, $a_4=a_3+a_2=5+3=8$ и т.д., $a_{10}=a_9+a_8=144$. Заметим, что получающиеся числа a_n - это хорошо известные числа Фибоначчи.

Ответ

144

Задача 35494 Тема: [Периодические и непериодические дроби]

Сложность: 3
Классы: 8,9

Докажите, что дроби $^{1000}/_{2001}$ и $^{1001}/_{2001}$ имеют равную длину периодов.

Подсказка

Длина периода

1 = 0,999999...

Решение

Заметим, что сумма двух данных дробей равна 1. Пусть первая дробь имеет десятичную запись $0,a_1a_2a_3$... Рассмотрим число R, выраженное десятичной дробью, меньшей 1, у которой на i-м месте после запятой, стоит цифра $9 - a_i$. Тогда в сумме $^{1000}/_{2001} + R$ в каждом разряде после запятой будет стоять 9, то есть $^{1000}/_{2001} + R = 0,9999... = 1$. Таким образом, $R = {}^{1001}/_{2001}$. Теперь видно, что если $ab...z$ – некоторая комбинация цифр, являющаяся периодом дроби $^{1000}/_{2001}$, то комбинация цифр $(9 - a)(9 - b)...(9 - z)$ есть период дроби $^{1001}/_{2001}$. Следовательно, период дроби $^{1001}/_{2001}$ не длиннее периода $^{1000}/_{2001}$.

Аналогично показываем, что период дроби $^{1000}/_{2001}$ не длиннее период дроби $^{1001}/_{2001}$. Следовательно, периоды этих двух дробей равны.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 35554 Тема: [Тождественные преобразования]

Сложность: 3
Классы: 8,9

Найдите значение произведения (1-1/4)(1-1/9)...(1-1/100) (числа в знаменателях равны квадратам натуральных чисел от 2 до 10).

Телескоп

Подсказка

Каждый сомножитель можно привести к общему знаменателю и разложить по формуле разности квадратов.

Решение

Преобразуем данное выражение: (1-1/4)(1-1/9)...(1-1/100) = $((2^2-1)/2^2)((3^2-1)/3^2)...((10^2-1)/10^2)$. Используя формулу разности квадратов, далее преобразуем последнее выражение к виду $((2-1)*(2+1)/2^2)((3-1)(3+1)/3^2)...((10-1)(10+1)/10^2)$ = (1*3/2*2)(2*4/3*3)...(9*11/10*10). Мы видим, что почти все сомножители числителя и знаменателя сокращаются. В числителе остается 11, а в знаменателе - 2 и 10. Таким образом, значение выписанного произведения равно 11/20=0,55.

Ответ

0,55.

Задача 35724 Темы: [Арифметическая прогрессия]
[Примеры и контрпримеры. Конструкции]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Может ли сумма 1000 последовательных нечётных чисел быть седьмой степенью натурального числа?

Подсказка

Оптимальная замена

Выведите формулу суммы тысячи последовательных нечетных чисел.

Решение

Пусть $(n-999), (n-997), \ldots, (n-1), (n+1), \ldots, (n+999)$ - тысяча последовательных нечётных чисел. Тогда их сумма $S=(n-999)+(n-997)+\ldots+(n-1)+(n+1)+\ldots+(n+999)=1000n$. Если $n=10000$, то $S=1000n=10000000=10^7$, то есть сумма S равна седьмой степени натурального числа.

Ответ

да.

Задача 35832 Темы: [Четность и нечетность] [Подсчет двумя способами]

Сложность: 3
Классы: 6,7

Имеется таблица 1999×2001. Известно, что произведение чисел в каждой строке отрицательно. Докажите, что найдётся столбец, произведение чисел в котором тоже отрицательно.

Решение

Нечетное число нечетных чисел

По условию в каждой строке находится *нечётное* количество отрицательных чисел (и нет нулей). Так как количество строк нечётно, то всего в таблице нечётное число отрицательных чисел. Значит, по крайней мере в одном из столбцов (точнее, в нечётном числе столбцов) их тоже нечётное число. Произведение чисел этого столбца отрицательно.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 60320 [Золотая цепочка] Темы: [Геометрическая прогрессия] [Упорядочивание по возрастанию (убыванию)] [Классическая комбинаторика (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 9,10

а) На постоялом дворе остановился путешественник, и хозяин согласился в качестве уплаты за проживание брать кольца золотой цепочки, которую тот носил на руке. Но при этом он поставил условие, чтобы оплата была ежедневной: каждый день хозяин должен был иметь на одно кольцо больше, чем в предыдущий. Замкнутая в кольцо цепочка содержала 11 колец, а путешественник собирался прожить ровно 11 дней, поэтому он согласился. Какое наименьшее число колец он должен распилить, чтобы иметь возможность платить хозяину?

б) Из скольких колец должна состоять цепочка, чтобы путешественник мог прожить на постоялом дворе наибольшее число дней при условии, что он может распилить только n колец?

Комба :-)

Решение

а) Достаточно разрезать два кольца так, чтобы отделились куски из трёх и шести колец. На третий день путешественник отдает кусок из трёх колец и получает два кольца сдачи, а на шестой – кусок из шести колец и получает пять колец сдачи.

б) Расположим получившиеся куски цепочки (не считая распиленных колец) по возрастанию числа колец в них: $a_1 \le a_2 \le \dots$ Ясно, что $a_1 \le n+1$ (иначе заплатить за (n+1)-й день не удастся), $a_2 \le a_1 + n + 1 \le 2(n+1)$, $a_3 \le a_2 + a_1 + n + 1 \le 4(n+1)$, ... Кроме того, количество кусков не превосходит n. Поэтому в цепочке не более $n + (n+1)(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) = (n+1)2^n - 1$ колец.

Взяв куски максимальной возможной длины ($a_k = (n+1)2^{k-1}$, $k = 1, \dots, n$), мы получим цепочку из $(n+1)2^n - 1$ колец.

Ответ

а) 2 кольца. б) Из $(n+1)2^n - 1$ колец.

Задача 60334 Темы: [Уравнения в целых числах]
[Алгебраические задачи на неравенство треугольника]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Сколько существует (невырожденных) треугольников периметра 100 с целыми длинами сторон?

Решение

Подсчет количества решений

Нам нужно найти число троек (a, b, c) натуральных чисел, где $a \le b \le c$, $a + b + c = 100$, $a + b > c$.

Ясно, что c может принимать значения от 34 до 49. При каждом из этих значений $a + b = 100 - c$, значит, b может принимать значения от
½ $(100 - c)$ до c, точнее, от $50 - {}^{c}/_{2}$ до c при чётном c (всего ${}^{3c}/_{2} - 49$ вариантов) и от $50 - {}^{c-1}/_{2}$ до c – при нечётном $({}^{3c-1}/_{2} - 49$ вариантов).

Итак, при $c = 34, 36, ..., 48$ получаем 2, 5, ..., 23 треугольника, а при $c = 35, 37, ..., 49$ – 3, 6, ..., 24 треугольника. Всего $8 \cdot 26 = 208$ треугольников.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 60476 Темы: [Простые числа и их свойства] [Примеры и контрпримеры. Конструкции] Сложность: 3 Классы: 7,8,9

Верно ли, что все числа вида $p_1p_2...p_n + 1$ являются простыми? (p_k – k-е простое число.)

Решение

$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13 + 1 = 30031 = 59\cdot509$.

Ответ

Неверно.

Задача 60496 Тема: [НОД и НОК. Взаимная простота]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Докажите, что $(5a + 3b, 13a + 8b) = (a, b)$.

Алгоритм Евклида

Подсказка

$8(5a + 3b) - 3(13a + 8b) = a$, $5(13a + 8b) - 13(5a + 3b) = b$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 60512 Тема: [НОД и НОК. Взаимная простота]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Докажите, что если $(a, b) = 1$, то наибольший общий делитель чисел $a + b$ и $a^2 + b^2$ равен 1 или 2.

Решение

Пусть $d = (a^2 + b^2, a + b)$. Согласно задаче 60510 числа $a + b$ и ab взаимно просты. Значит, $(a + b, 2ab) = 1$ или 2. Число $2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ делится на d. Следовательно, $(a + b, 2ab)$ делится на d.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 60513 Тема: [НОД и НОК. Взаимная простота]

Еще немного Евклида

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Пусть a и b – натуральные числа. Докажите, что среди чисел $a, 2a, 3a, \ldots, ba$ ровно (a, b) чисел делится на b.

Подсказка

Пусть $b = c(a, b)$. Число ka делится на b $\Leftrightarrow$ k делится на c.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 60564 [Тождество Кассини] Темы: [Числа Фибоначчи] [Индукция (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10,11

Тождество Кассини. Докажите равенство

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad (n > 0).$$

Кассини

Будет ли тождество Кассини справедливо для всех целых n?

Подсказка

Примените индукцию.

Задача 60634 Темы: [Четность и нечетность]
[Разбиения на пары и группы; биекции]
[Инварианты]

Сложность: 3
Классы: 7,8

Вдоль улицы стоят шесть деревьев, и на каждом из них сидит по вороне. Раз в час две из них взлетают, и каждая садится на одно из соседних деревьев. Может ли получиться так, что все вороны соберутся на одном дереве?

Решение

Пусть первое, третье и пятое деревья – дубы, а остальные – берёзы. Заметим, что чётность числа ворон на дубах не меняется. В начале это число равно 3, поэтому оно никогда не станет чётным. В частности, вороны не могут собраться на одном дереве.

Ответ

Не может.

Задача 60772 Темы: [Обыкновенные дроби] [Разбиения на пары и группы; биекции]

Сложность: 3
Классы: 8,9

Докажите, что если $n > 2$, то число всех правильных несократимых дробей со знаменателем n чётно.

Решение

Все такие дроби можно разбить на пары k/n, $n-k/n$. Числа в такой паре совпадать не могут. Действительно, из равенства $k/n = n-k/n$ следует, что n чётно,
$k = n/2$ и дробь k/n можно сократить на $n/2$.

Задача 60871 Темы: [Доказательство тождеств. Преобразования выражений] [Треугольник Паскаля и бином Ньютона]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

При каких натуральных n число $(\sqrt{2}+1)^n-(\sqrt{2}-1)^n$ будет целым?

Ответ

При нечётных n.

Задача 61022 Темы: [Деление многочленов с остатком. НОД и НОК многочленов] [Производная и кратные корни] Сложность: 3 Классы: 9,10,11

При каких A и B многочлен $Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ имеет число $x = 1$ не менее чем двукратным корнем?

Решение

$f(1) = A + B + 1$, $f'(1) = (n + 1)A + nB$. Решив систему $A + B + 1 = (n + 1)A + nB = 0$, находим $A = n$, $B = -(n + 1)$.

Ответ

$A = n$, $B = -(n + 1)$.

Добавить Прислать комментарий

Задача 61050 Тема: [Интерполяционный многочлен Лагранжа]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ – действительные числа. Постройте многочлены $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ степени $n - 1$, которые удовлетворяют условиям $f_i(x_i) = 1$ и $f_i(x_j) = 0$ при $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Ответ

Лагранж

$$f_i(x) = \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Задача 61253 Тема: [Кубические многочлены]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Докажите, что произвольное уравнение третьей степени $z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$ при помощи линейной замены переменной $z = x + \beta$ можно привести к виду $x^3 + px + q = 0$.

Решение

При замене $z = x + \beta$ коэффициент при x в полученном многочлене равен $3\beta + A$. Он обратится в ноль при $\beta = -A/3$.

Добавить Прислать комментарий

Задача 61260 Тема: [Кубические многочлены]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Выразите через a и b действительный корень уравнения $x^3 - a^3 - b^3 - 3abx = 0$.
Найдите представления для двух комплексных корней этого уравнения.

Решение

Из равенства $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ ясно, что $x = a + b$ – корень нашего уравнения. Поделив $x^3 - a^3 - b^3 - 3abx$ на $x - a - b$, получим квадратное уравнение $x^2 + (a + b)x + a^2 - ab + b^2$ и найдём его комплексные корни.

Ответ

$x_1 = a + b$, $x^2 = \omega a + \omega^2 b$, $x^3 = \omega^2 a + \omega b$, где ω – кубический корень из 1.

Задача 61261 Тема: [Тождественные преобразования]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Докажите, что $(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)=X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-XZ$,
если $X=ax+cy+bz$, $Y=cx+by+az$, $Z=bx+ay+cz$.

Подсказка

Раскройте скобки.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 61281 Темы: [Системы алгебраических нелинейных уравнений] [Тригонометрические замены]

Сложность: 3
Классы: 9,10,11

Решите систему

$x^2 + y^2 = 1,$
$4xy(2y^2 - 1) = 1.$

Решение

Сделав замену $x = \sin\varphi$, $y = \cos\varphi$, получим уравнение $4\sin\varphi\cos\varphi\,(2\cos^2\varphi - 1) = 1$, то есть $\sin 4\varphi = 1$. Отсюда $\varphi = \pi/8 + k\pi/2$.

Ответ

$(\pm\sin\pi/8, \pm\cos\pi/8)$, $(\pm\sin 5\pi/8, \pm\cos 5\pi/8)$, или $\left(\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$, $\left(\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 61378 Тема: [Алгебраические неравенства (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10,11

Докажите неравенство для положительных значений переменных: $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c)$.

Подсказка

Докажите сначала неравенство $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

Решение

$a^3 + b^3 - ab(a + b) = (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a + b)(a - b)^2 \geq 0$. Сложив три таких неравенства, получим требуемое.

Задача 61383 Тема: [Классические неравенства (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 9,10,11

Доказите для положительных значений переменных неравенство $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$.

Замена

Подсказка

Воспользуйтесь неравенством *между средним арифметическим и средним гармоническим* (задача 61362).

Решение

После замены $x = b + c$, $y = a + c$, $z = a + b$ неравенство превращается в неравенство *между средним арифметическим и средним гармоническим* $\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leq \frac{x+y+z}{3}$.

Задача 61393 Тема: [Классические неравенства (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 9,10,11

Найдите наименьшую величину выражения $\sqrt{x_1^2+(1-x_2)^2}+\sqrt{x_2^2+(1-x_3)^2}+\ldots+\sqrt{x_{2n}^2+(1-x_1)^2}$.

Решение

Согласно $\boxed{\text{неравенству } \textit{между средним квадратичным и средним арифметическим}}$

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{x_1^2+(1-x_2)^2}+\sqrt{x_2^2+(1-x_3)^2}+\ldots+\sqrt{x_n^2+(1-x_1)^2}\right)\geq$$

$$\geq |x_1|+|1-x_2|+|x_2|+|1-x_3|+\ldots+|x_n|+|1-x_1|\geq x_1+1-x_2+x_2+1-x_3+\ldots+x_n+1-x_1=n.$$

Равенство достигается при $x_1=x_2=\ldots=x_n=½$.

Ответ

$\frac{n}{\sqrt{2}}$.

Задача 64359 Темы: [Многочлен нечетной степени имеет действительный корень] [Треугольник Паскаля и бином Ньютона]

Сложность: 3
Классы: 10,11

Автор: Богданов И.И.

Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1) = Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

Решение

Многочлен нечетной степени всегда имеет корень

Пусть $P(x) = x^{10} + p_9x^9 + ... + p_0$ и $Q(x) = x^{10} + q_9x^9 + ... + q_0$. По условию многочлен $P(x) - Q(x) = (p_9 - q_9)x^9 + ... + (p_0 - q_0)$ не имеет действительных корней. Значит, степень его чётна, то есть $p_9 = q_9$.

Заметим теперь, что $P(x+1) = x^{10} + (p_9 + 10)x^9 + ...$ и $Q(x-1) = x^{10} + (q_9 - 10)x^9 + ...$. Таким образом, многочлен $P(x+1) - Q(x-1) = 20x^9 + ...$ имеет девятую степень и, следовательно, имеет корень.

Задача 64440 Темы: [Турниры и турнирные таблицы] [Примеры и контрпримеры. Конструкции]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Автор: Френкин Б.Р.

В турнире участвуют 100 борцов, все разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. Борцы разбились на пары и провели поединки. Затем разбились на пары по-другому и снова провели поединки. Призы получили те, кто выиграл оба поединка. Каково наименьшее возможное количество призёров?

Решение

Самый сильный обязательно станет призёром.

Покажем, что может быть ровно один призёр. Пронумеруем борцов по возрастанию силы от 1 до 100. В первом туре проведём поединки
$1-2$, $3-4$, ..., $99-100$, во втором – $100-1$, $2-3$, ..., $98-99$. Тогда каждый, кроме самого сильного, в одном из туров проиграет.

Ответ

Один.

Задача 64665 Темы: [Средние величины] [Примеры и контрпримеры. Конструкции] [Принцип крайнего (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 10,11

Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 15. Найдите наибольшее значение наибольшего из этих чисел.

Решение

Оценка. Сумма данных чисел равна 150. Так как все числа различны, то сумма девяти наименьших из них не меньше, чем $1 + 2 + ... + 9 = 45$. Следовательно, наибольшее число не может быть больше чем 105.

Пример: $(1 + 2 + ... + 9 + 105) : 10 = 15$.

Ответ

105.

Задача 64719 Тема: [Квадратные уравнения. Теорема Виета]

Сложность: 3
Классы: 9,10,11

Автор: Жуков Г.

Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $^1/_a$ и c значения разных знаков.
Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

Решение

По условию, $0 > f(c)f(^1/_a) = (ac^2 + bc + c)(^1/a + {^b/_a} + c) = {^c/_a}\,(ac + b + 1)^2$. Следовательно, $^c/_a < 0$. Но по теореме Виета $^c/_a$ равно произведению корней $f(x)$, поэтому они разных знаков.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 64948 Темы: [Турниры и турнирные таблицы]
[Сочетания и размещения]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

В круговом шахматном турнире участвовало шесть человек: два мальчика и четыре девочки. Могли ли мальчики по итогам турнира набрать в два раза больше очков, чем девочки? (В круговом шахматном турнире каждый игрок играет с каждым по одной партии. За победу дается 1 очко, за ничью – 0,5, за поражение – 0).

Решение

В круговом турнире из шести участников разыгрывается $6\cdot5 : 2 = 15$ очков, причём каждый участник может набрать не более пяти очков. Если бы мальчики набрали в два раза больше очков, чем девочки, то они набрали 10 очков на двоих, то есть по 5 очков каждый. Но тогда оба должны были выиграть все партии, что невозможно (в личной встрече кто-то из них должен потерять очки).

Ответ

Не могли.

Задача 65415 Тема: [Арифметика. Устный счет и т.п.]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10,11

Автор: Френкин Б.Р.

Среди чисел $a + b$, $a - b$, ab, $^a/_b$ два положительных и два отрицательных. Является ли число b положительным или отрицательным?

Решение

Числа ab и $^a/_b$ одного знака. Следовательно, $a + b$ и $a - b$ имеют другой знак. Поскольку a находится между ними, то a тоже имеет этот знак. Таким образом, ab и $^a/_b$ отличаются знаком от a. Это означает, что b отрицательно.

Ответ

Отрицательным.

Задача 65422 Тема: [Системы алгебраических нелинейных уравнений]

Сложность: 3
Классы: 9,10,11

Решите систему уравнений:

$1/x = y + z$,

$1/y = z + x$,

$1/z = x + y$.

Решение

Первый способ. Вычитая из первого уравнения второе, получим: $1/x - 1/y = y - x \Leftrightarrow (y - x)(1/xy - 1) = 0 \Leftrightarrow x = y$ или $xy = 1$. Рассмотрим два случая.

1) $x = y$. Исключив из первого и третьего уравнений переменную y, получим $1/x = x + z$, $1/z = 2x \Leftrightarrow z = 1/2x$, $1/2x = x \Leftrightarrow x = z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) $xy = 1$. Тогда из первого уравнения следует, что $z = 0$, и выражение $1/z$ не имеет смысла. Таким образом, этот случай невозможен.

Второй способ. Заметим, что $1/x + x = 1/y + y = 1/z + z = x + y + z$. Пусть $x + y + z = A$, тогда x, y и z – корни уравнения $1/t + t = A$, которое равносильно квадратному уравнению $t^2 - At + 1 = 0$. Так как квадратное уравнение имеет не более двух корней, то значения каких-то двух переменных должны быть одинаковыми. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассмотренным в пункте 1) первого способа.

Ответ

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Задача 65586 Тема: [Делимость чисел. Общие свойства]

Сложность: 3
Классы: 7,8,9

Найдите наименьшее натуральное n, для которого $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 1000.

Решение

При любом натуральном n данное произведение делится на 8, так как среди любых четырёх последовательных натуральных чисел одно делится на 4 и еще одно – на 2. Следовательно, достаточно найти наименьшее n, для которого данное произведение делится на $125 = 5^3$. Так как на 5 может делиться только один из множителей, то n – наименьшее, если множитель, делящийся на 125, – наибольший. Значит, $n + 4 = 125$, то есть $n = 121$.

Ответ

$n = 121$

Задача 65959 Темы: [Произведения и факториалы] [Примеры и контрпримеры. Конструкции]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Верно ли, что любое положительное чётное число можно представить в виде произведения целых чисел, сумма которых равна нулю?

Решение

$2k = 2k\cdot(-1)^{2k}$ для любого $k > 0$.

Ответ

Верно.

Темы: [Треугольник Паскаля и бином Ньютона]
[Системы счисления (прочее)]

Сложность: 3+
Классы: 9,10
Название задачи: Биномиальная система счисления.

Добавить
Прислать комментарий

Условие

Покажите, что любое натуральное число n может быть представлено в виде $n = C_x^1 + C_y^2 + C_z^3$, где x, y, z – такие целые числа, что $0 \le x < y < z$, либо $0 = x = y < z$.

Решение

Пусть z – наибольшее число, для которого $C_z^3 \le n$. Тогда "остаток" $r < n - C_z^3 < C_{z+1}^3 - C_z^3 = C_z^2$. Если $r > 0$, пусть y – наибольшее число, для которого $C_y^2 \le r$. При этом число $r - C_y^2 < C_{y+1}^2 - C_y^2 = C_y^1$ можно записать в виде C_x^1, где $x < y$.

С другой стороны, наибольшее число, которое можно представить в таком виде с использованием C_{z-1}^3, это

$$C_{z-1}^3 + C_{z-2}^2 + C_{z-3}^1 < C_{z-1}^3 + C_{z-2}^2 + C_{z-3}^1 + C_{z-3}^0 = C_{z-1}^3 + C_{z-2}^2 + C_{z-2}^1 = C_{z-1}^3 + C_{z-1}^2 = C_z^3,$$

поэтому представить наше число n другим способом не удастся.

Замечания

Аналогично можно доказать, что любое натуральное число n может быть единственным образом представлено в виде $n = C_{x_1}^1 + C_{x_2}^2 + \ldots + C_{x_k}^k$ с соответствующими ограничениями на числа x_1, ..., x_k.

Задача 73613 Темы: [Целочисленные и целозначные многочлены] [Треугольник Паскаля и бином Ньютона]

Сложность: 3
Классы: 8,9,10

Каждое неотрицательное целое число представимо, причём единственным образом, в виде $\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}$, где x и y – целые неотрицательные числа. Докажите это.

Подсказка

Обозначим сумму $x+y$ через s и перепишем данную формулу так: $\frac{(x+y)^2+3x+y}{2} = \frac{s^2+s}{2} + x = C_x^1 + C_{s+1}^2$, где $0 \le x \le s$. Мы получили упрощенный вариант задачи 60417.

Добавить

Прислать комментарий

Задача 76536 Темы: [Свойства коэффициентов многочлена] [Производящие функции]

Сложность: 3
Классы: 8,9

Определить коэффициенты, которые будут стоять при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$(1+x^5+x^7)^{20}.$$

Решение

Число 18 нельзя представить в виде суммы чисел 5 и 7, поэтому коэффициент при x^{18} будет равен нулю. Число 17 представляется в виде суммы чисел 5 и 7 следующим образом: $17 = 7 + 5 + 5$; с точностью до перестановки слагаемых это представление единственно. В одном из 20 множителей $1 + x^5 + x^7$ мы должны выбрать x^7, а в двух из 19 оставшихся x^5. Поэтому коэффициент при x^{17} равен $20 \cdot 19 \cdot 18 : 2 = 3420$.

Ответ

3420 и 0.

Задача 77950 Темы: [Алгебраические неравенства (прочее)] [Треугольник Паскаля и бином Ньютона]

Сложность: 3
Классы: 9,10

Докажите, что $2^n > (1-x)^n + (1+x)^n$ при целом $n \geq 2$ и $|x| < 1$.

Решение

$2^n = ((1-x) + (1+x))^n = (1-x)^n + (1+x)^n + \ldots > (1-x)^n + (1+x)^n$, поскольку остальные слагаемые в разложении по биному положительны.

Задача 78003 Темы: [Многочлены (прочее)] [Производная и кратные корни] Сложность: 3 Классы: 10,11

Доказать, что если $x_0^4 + a_1x_0^3 + a_2x_0^2 + a_3x_0 + a_4 = 0$, $4x_0^3 + 3a_1x_0^2 + 2a_2x_0 + a_3 = 0$, то $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ делится на $(x - x_0)^2$.

Решение

Пусть $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$. По условию $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Следовательно, x_0 – двукратный корень многочлена $f(x)$, то есть многочлен $f(x)$ делится на $(x - x_0)^2$.

Задача 73717

Темы: [Неравенство Коши] [Алгебраические неравенства (прочее)]

Сложность: 4
Классы: 8,9,10,11

Добавить
Прислать комментарий

Условие

Докажите, что если

а) a, b и c – положительные числа, то $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$;

б) a, b, c и d – положительные числа, $\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}\geq\frac{4}{3}$;

в) a_1, ..., a_n – положительные числа $(n > 1)$, то $\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}\geq\frac{n}{n-1}$.

Решение

в). Обозначим $s = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $b_i = s - a_i$. Нам нужно доказать, что $\frac{s-b_1}{b_1}+\frac{s-b_2}{b_2}+\ldots+\frac{s-b_n}{b_n}\geq\frac{n}{n-1}$, то есть что $s\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\right)\geq\frac{n}{n-1}+n=\frac{n^2}{n-1}$.

Первый способ. Согласно неравенству между средним арифметическим и средним гармоническим (см. задачу 61402 в) $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\geq\frac{n^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$.

Но $b_1 + b_2 + ... + b_n = ns - a_1 - a_2 - ... - a_n = (n - 1)s$, откуда $s\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\right)\geq\frac{sn^2}{n(n-1)}=\frac{n^2}{n-1}$.

Второй способ. $(n-1)\frac{s-b_1}{b_1}=\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n-(n-1)b_1}{b_1}=\frac{b_2+\ldots+b_n}{b_1}-(n-2)$.

Преобразуем так же остальные слагаемые $(n-1)\frac{s-b_i}{b_i}$ и все n слагаемых сложим. Потом сгруппируем попарно дроби b_i/b_j и b_j/b_i и воспользуемся неравенством $b_i/b_j + b_j/b_i \geq 2$.

Поскольку всего таких пар будет C_n^2, то в результате получим:

$$(n-1)\left(\frac{s-b_1}{b_1}+\ldots+\frac{s-b_n}{b_n}\right)\geq C_n^2\cdot2-(n-2)n=n(n-1)-n^2+2n=n.$$

Задача 78521 Темы: [НОД и НОК. Взаимная простота] [Доказательство от противного] Сложность: 3 Классы: 9,10

Доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел не является степенью никакого целого числа.

Решение

Предположим, что $n(n+1) = a^m$, где $m \geq 2$ (a, m и n – натуральные числа). Числа n и $n+1$ не имеют общих делителей, поэтому $n = b^m$ и $n+1 = c^m$. Но этого не может быть, потому что разность между двумя последовательными m-ми степенями больше 1.

Добавить Прислать комментарий

Задача 78588 Темы: [Уравнения в целых числах] [Перебор случаев] Сложность: 3 Классы: 9,10,11

Решить в натуральных числах систему

$x + y = zt$,
$z + t = xy$.

Решение

Рассмотрим два случая.

1) $x = 1$. Тогда $z + t = y = zt - 1$, откуда $(z - 1)(t - 1) = zt - z - t + 1 = 2$. Следовательно, $\{z, t\} = \{2, 3\}$, $y = 6 - 1 = 5$.

2) $x, y, z, t > 1$. Тогда $(x - 1)(y - 1) \geq 1$, то есть $xy \geq x + y$. Аналогично $zt \geq z + t$. Складывая, получаем $xy + zt \geq x + y + z + t$. С другой стороны, складывая уравнения данной системы, получаем $xy + zt = x + y + z + t$. Следовательно, оба неравенства $xy \geq x + y$ и $zt \geq z + t$ на самом деле есть равенства, то есть $x = y = z = t = 2$.

Ответ

(1, 5, 2, 3), (5, 1, 2, 3), (1, 5, 3, 2), (5, 1, 3, 2), (2, 3, 1, 5), (2, 3, 5, 1), (3, 2, 1, 5), (3, 2, 5, 1), (2, 2, 2, 2).

Задача 78707 Тема: [Количество и сумма делителей числа]

Сложность: 3
Классы: 8

Даны два натуральных числа m и n. Выписываются все различные делители числа m – числа $a, b, ..., k$ – и все различные делители числа n – числа $s, t, ..., z$. (Само число и 1 тоже включаются в число делителей.) Оказалось, что $a + b + ... + k = s + t + ... + z$ и $^1/_a + ^1/_b + ... + ^1/_k = ^1/_s + ^1/_t + ... + ^1/_z$.

Доказать, что $m = n$.

Решение

Если d – делитель числа n, то $^n/_d$ – тоже делитель числа n. Следовательно, наборы чисел $(a, b, ..., k)$ и $(^n/_a, ^n/_b, ..., ^n/_k)$ совпадают, откуда

$^n/_a + ^n/_b + ... + ^n/_k = a + b + ... + k.$

Аналогично $^m/_s + ^m/_t + ... + ^m/_z = s + t + ... + z.$

Деля одно из полученных равенств на другое, получаем $n = m$, что и требовалось доказать.

Задача 78733 Тема: [Линейные неравенства и системы неравенств]

Сложность: 3
Классы: 8,9

На каждую чашку весов положили k гирь, занумерованных числами от 1 до k, причём левая чашка перевесила. Оказалось, что если поменять чашками любые две гири с одинаковыми номерами, то всегда либо правая чашка начинает перевешивать, либо чашки приходят в равновесие. При каких k это возможно?

Решение

Оценка. Пусть a_i – масса i-й гири на левой чашке, b_i – на правой, $c_i = a_i - b_i$. Тогда условие задачи примет вид: $S = c_1 + ... + c_k > 0$, $S - 2c_i \le 0$ для каждого i. Складывая неравенства $S - 2c_1 \le 0$ и $S - 2c_2 \le 0$, получаем $c_1 + c_2 \ge S$. С другой стороны, все числа c_i положительны (так как они больше положительного числа $S/2$). Следовательно, всего чисел c_i не больше двух, то есть $k \le 2$.

Примеры. При $k = 1$ возьмём $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, а при $k = 2$ возьмём $a_1 = a_2 = 2$, $b_1 = b_2 = 1$.

Ответ

При $k = 1, 2$.

Задача 79311 Темы: [Квадратные уравнения и системы уравнений]
[Принцип крайнего (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 11

Найти все положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2, \\ x_2 + x_3 = x_4^2, \\ x_3 + x_4 = x_5^2, \\ x_4 + x_5 = x_1^2, \\ x_5 + x_1 = x_2^2. \end{cases}$$

Мостик

Решение

Пусть a – наибольшее из чисел x_1, ..., x_5, b – наименьшее из этих чисел. Тогда $a^2 \le 2a$ и $b^2 \ge 2b$. По условию числа a и b положительны, поэтому $a \le 2$ и $b \ge 2$, следовательно, $a = b = 2$.

Ответ

(2, 2, 2, 2, 2).

Задача 79362 Темы: [Геометрическая прогрессия] [Доказательство от противного] Сложность: 3 Классы: 8

Имеется несколько гирь, общая масса которых равна 1 кг. Каждой гире присвоен свой номер: 1, 2, 3, ... Доказать, что найдётся такой номер n, что масса гири с номером n строго больше $\frac{1}{2^n}$ кг.

Решение

Пусть $p_1, \ldots, p_k$ — веса данных гирь. Предположим, что $p_n \leq \frac{1}{2^n}$ для всех n. Тогда $p_1 + p_2 + \ldots + p_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$.

Это противоречит тому, что $p_1 + \ldots + p_n = 1$.

Задача 79510 Тема: [Линейные неравенства и системы неравенств]

Сложность: 3
Классы: 9

Доказать, что если $a > b > 0$ и $x/_a < y/_b$, то справедливо неравенство $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) > \frac{x+y}{a+b}$.

Решение

Так как числа a и b положительны, то доказываемое неравенство эквивалентно неравенству $a^2y + b^2x > abx + aby$, то есть $a(a - b)y > b(a - b)x$. Остаётся заметить, что по условию $ay > bx$ и $a - b > 0$.

Задача 86476 Темы: [Произведения и факториалы] [Выделение полного квадрата. Суммы квадратов]

Сложность: 3
Классы: 7,8,9

Доказать, что при натуральном n число $nm+1$ будет составным хотя бы для одного натурального m.

Решение

Конструкции

Если $m = n+2$ тогда $nm + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ – составное число.

Добавить Прислать комментарий

Задача 97810 Темы: [НОД и НОК. Взаимная простота] [Перебор случаев]

Сложность: 3
Классы: 8,9

Автор: Фольклор

Найти все такие натуральные k, которые можно представить в виде суммы двух взаимно простых чисел, отличных от 1.

Решение

Конструкции

Любое нечётное число $k = 2n + 1 > 3$ легко представить в нужном виде: $k = n + (n + 1)$.

Чётное число, кратное 4, $(k = 4n)$ представляется в виде суммы чисел $2n + 1$ и $2n - 1$. Последнее число больше 1 при $k \geq 8$.

Наконец, число k вида $4n + 2$ представляется в виде суммы $(2n + 3) + (2n - 1)$. Эти числа взаимно просты, поскольку из разность равна 4, а 4 взаимно просто с любыми нечётными числами. Последнее число больше 1 при $k \geq 10$.

Таким образом, мы представили в нужном виде все числа, кроме 1, 2, 3, 4 и 6. Нетрудно проверить, что ни одно этих чисел в требуемом виде представить нельзя.

Ответ

Все натуральные числа, кроме 1, 2, 3, 4 и 6.

Задача 97964 Темы: [Тождественные преобразования]
[Выделение полного квадрата. Суммы квадратов]

Сложность: 3
Классы: 7,8

Автор: Фольклор

a, b и c – целые числа. Докажите, что если $a = b + c$, то $a^4 + b^4 + c^4$ есть удвоенный квадрат целого числа.

Решение

$a^2 - 2bc = b^2 + c^2$. Поэтому $a^4 + b^4 + c^4 = a^4 + (a^2 - 2bc)^2 - 2b^2c^2 = 2a^4 - 4a^2bc + 2b^2c^2 = 2(a^2 - bc)^2$.

Задача 98063 Темы: [Делимость чисел. Общие свойства] [Примеры и контрпримеры. Конструкции] [Итерации]

Сложность: 3
Классы: 6,7,8

Автор: Фомин С.В.

Найдите 10 различных натуральных чисел, обладающих тем свойством, что их сумма делится на каждое из них.

Решение

Заметим, что три числа 1, 2 и 3 обладают тем свойством, что их сумма делится на каждое из них. Рассмотрим теперь числа 1, 2, 3 и 6 $(6 = 1 + 2 + 3)$. Очевидно, что эти четыре числа обладают тем же свойством. Допишем теперь к ним пятое число $1 + 2 + 3 + 6 = 12$, шестое – $1 + 2 + 3 + 6 + 12 = 24$ и т.д. Так получается искомый набор из десяти чисел 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384.

Добавить Прислать комментарий

Сложность: 3
Классы: 8,9

Задача 98195 Тема: [Уравнения в целых числах]

Автор: Фольклор

Конечно или бесконечно число натуральных решений уравнения $x^2 + y^3 = z^2$?

Решение

Бесконечная серия решений

Одно из решений уравнения – $(1, 2, 3)$. С другой стороны, если (x, y, z) – решение, то и $(8x, 4y, 8z)$ – решение.

Ответ

Бесконечно.

Задача 98240 Тема: [Разложение на множители]

Сложность: 3
Классы: 7,8,9

Автор: Курляндчик Л.Д.

Пусть a, b, c, d – такие вещественные числа, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a + b + c + d = 0$.
Докажите, что сумма каких-то двух из этих чисел равна нулю.

Решение

$0 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = (a + b)((a^2 - ab + b^2) - (c^2 - cd + d^2)) = (a + b)((a + b)^2 - (c + d)^2 + 3cd - 3ab) = 3(a + b)(cd - ab)$. Значит, либо $a + b = 0$, либо $cd = ab$. В первом случае все доказано, во втором $a + b = (-c) + (-d)$ и $ab = (-c)(-d)$. Но тогда по теореме Виета пара $\{a, b\}$ совпадает с парой $\{-c, -d\}$.

Добавить Прислать комментарий

Задача 98326 Темы: [Четность и нечетность]
[Степень вершины]
[Принцип Дирихле (прочее)]

Сложность: 3
Классы: 8,9

Автор: Васильев Н.Б.

При каком $n > 1$ может случиться так, что в компании из $n + 1$ девочек и n мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики – с одним и тем же числом девочек?

Решение

Девочка может быть знакома с $0, 1, ..., n$ мальчиками. Поскольку девочек $n + 1$ и вариантов $n + 1$, то все эти варианты реализуются. При этом общее число пар знакомых равно $(0 + 1 + ... + n) = {}^{n(n+1)}/_2$, поэтому каждый мальчик знаком с ${}^{(n+1)}/_2$ девочками. Значит, n нечётно.

При любом нечётном $n = 2m + 1$ можно осуществить требуемые знакомства: разобьём девочек на пары (всего $m + 1$ пара); первую девочку k-й пары
$(k = 0, 1, ..., m)$ познакомим с k мальчиками, вторую – с остальными $n - k$ мальчиками. При этом каждый мальчик знаком ровно с одной девочкой из каждой пары.

Ответ

При любом нечётном $n > 1$.

Задача 98361 Темы: [Рекуррентные соотношения (прочее)] [Обратный ход]

Сложность: 3
Классы: 7,8,9

Автор: Берзиньш А.

Последовательность $\{x_n\}$ определяется условиями: $x_1 = 19$, $x_2 = 97$, $x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}$.

Докажите, что среди членов последовательности найдётся ноль. Найдите номер этого члена.

Решение

Заметим, что если некоторый член этой последовательности равен 0, то следующие члены не определены, так как в формуле для определения первого из них содержится деление на 0. Все дальнейшие рассуждения относятся к членам последовательности до этого нуля включительно (или к бесконечной последовательности, если нуля нет).

Имеем: $x_{n+2}x_{n+1} = x_{n+1}x_n - 1$.

$x_k = 0$ тогда и только тогда, когда $x_{k-1}x_{k-2} = 1$, $x_{k-2}x_{k-3} = 2$, ..., $x_3x_2 = k - 3$, $x_2x_1 = k - 2 = 19\cdot 97$. Следовательно, $k = 19\cdot 97 + 2 = 1845$.

Ответ

1845.

Задача 98414 Тема: [Неравенство Коши]

Сложность: 3
Классы: 8,9

Автор: Чернятьев Н.Л.

Рассматриваются такие наборы действительных чисел $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_{20}\}$, заключённых между 0 и 1, что $x_1x_2x_3...x_{20} = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)...(1 - x_{20})$. Найдите среди этих наборов такой набор, для которого значение $x_1x_2x_3...x_{20}$ максимально.

Решение

Значение произведения $x_1x_2...x_{20}$ максимально тогда же, когда максимально значение выражения $(x_1x_2...x_{20})^2 = x_1x_2...x_{20}(1 - x_1)(1 - x_2)...(1 - x_{20})$. Последнее произведение разбивается на множители вида $x_k(1 - x_k)$, каждый из которых (например, согласно *неравенству Коши*) максимален при $x_k = ½$.

Ответ

(½, ½, ..., ½).

Задача 103808 Темы: [Уравнения в целых числах] [Примеры и контрпримеры. Конструкции]

Сложность: 3
Классы: 7

Автор: Ковальджи А.К.

Найдите хотя бы две пары натуральных чисел, для которых верно равенство $2x^3 = y^4$.

Подсказка

Заметив, что $(2, 2)$ – решение, попробуйте найти ещё одно в виде $x = 2^k$, $y = 2^n$.

Решение

Заметим, что $x = 2$, $y = 2$ – решение. Попробуем найти ещё одно в виде $x = 2^k$, $y = 2^n$.

Имеем $2\cdot(2^k)^3 = (2^n)^4$, или $2^{3k+1} = 2^{4n}$.

Осталось подобрать k и n так, чтобы было выполнено равенство $3k + 1 = 4n$. Например, $k = 5$, $n = 4$ и, соответственно, $x = 32$, $y = 16$.

Ответ

$(2, 2)$, $(32, 16)$.