Олимпиада 1

Задача 1. Даны положительные действительные числа a, b. Определите все функции $f: R \to R$ такие, что

$$f(f(x)+y) = ax + f(bx + f(y)) \forall x, y \in R$$

Задача 2. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC. Высоты BP и CQ этого треугольника пересекаются в точке H. На отрезке BP нашлась такая точка X, что BX = HP, а на отрезке CQ нашлась такая точка Y, что QH = CY. Описанная окружность треугольника HXY пересекает описанную окружность треугольника ABC в двух точках: D и E. Докажите, что треугольник HDE прямоугольный.

Задача 3. В некотором графе G для любого множества его вершин количество вершин в этом множестве не превосходит количества вершин, смежных хотя бы с одной вершиной этого множества. Докажите, что из этого графа можно выкинуть не более трети всех вершин таким образом, что остальные вершины можно будет разбить на пары смежных.

Олимпиада 1

Задача 1. Даны положительные действительные числа a, b. Определите все функции $f: R \to R$ такие, что

$$f(f(x)+y) = ax + f(bx + f(y)) \forall x, y \in R$$

Задача 2. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC. Высоты BP и CQ этого треугольника пересекаются в точке H. На отрезке BP нашлась такая точка X, что BX = HP, а на отрезке CQ нашлась такая точка Y, что QH = CY. Описанная окружность треугольника HXY пересекает описанную окружность треугольника ABC в двух точках: D и E. Докажите, что треугольник HDE прямоугольный.

Задача 3. В некотором графе G для любого множества его вершин количество вершин в этом множестве не превосходит количества вершин, смежных хотя бы с одной вершиной этого множества. Докажите, что из этого графа можно выкинуть не более трети всех вершин таким образом, что остальные вершины можно будет разбить на пары смежных.

Олимпиада 1

Задача 1. Даны положительные действительные числа a, b. Определите все функции $f: R \to R$ такие, что

$$f(f(x)+y) = ax + f(bx + f(y)) \forall x, y \in R$$

Задача 2. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC. Высоты BP и CQ этого треугольника пересекаются в точке H. На отрезке BP нашлась такая точка X, что BX = HP, а на отрезке CQ нашлась такая точка Y, что QH = CY. Описанная окружность треугольника HXY пересекает

описанную окружность треугольника ABC в двух точках: D и E. Докажите, что треугольник HDE прямоугольный.

Задача 3. В некотором графе G для любого множества его вершин количество вершин в этом множестве не превосходит количества вершин, смежных хотя бы с одной вершиной этого множества. Докажите, что из этого графа можно выкинуть не более трети всех вершин таким образом, что остальные вершины можно будет разбить на пары смежных.