Олимпиада 2

№1. Существует ли перестановка $(a_1, a_2, \ldots, a_{2019})$ чисел $(1, 2, \ldots 2019)$ такая, что $a_i + i$ — полный квадрат для всех $1 \leqslant i \leqslant 2019$?

№2. Вписанная и вневписанная окружности прямоугольного треугольника ABC, в котором угол C прямой, касаются отрезка BC в точках A_1 и A_2 соответственно. Аналогично определим точки B_1 и B_2. Докажите, что отрезки A_1B_2 и B_1A_2 пересекаются на высоте проведённой из вершины C треугольника ABC.

№3. Найдите все пары натуральных чисел a и b таких, что существуют натуральные числа m, n такие, что $a^3 + b = 2^m$, $b^3 + a = 2^n$.

Олимпиада 2. Решения задач

№1. Существует ли перестановка $(a_1, a_2, \ldots, a_{2019})$ чисел $(1, 2, \ldots 2019)$ такая, что $a_i + i$ — полный квадрат для всех $1 \leqslant i \leqslant 2019$?

Ответ: Да, существует.

Решение. Для i от 6 до 2019 определим $a_i = 2025 - i$. Остальные как $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$, $a_5 = 4$.

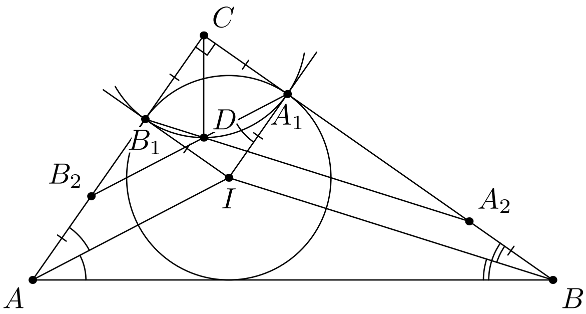
№2. Вписанная и вневписанная окружности прямоугольного треугольника ABC, в котором угол C прямой, касаются отрезка BC в точках A_1 и A_2 соответственно. Аналогично определим точки B_1 и B_2. Докажите, что отрезки A_1B_2 и B_1A_2 пересекаются на высоте проведённой из вершины C треугольника ABC.

Решение.

Решение. Обозначим $A_1B_2 \cap B_1A_2 = D$. Для решения задачи достаточно показать равенство $\angle BAC = \angle DCA_1$. Так как из это равенства следует $\angle BAC + \angle ACD = \angle BAC + (90^\circ - \angle DCA_1) = 90^\circ$.

Пусть I — центр вписанной окружности. Тогда четырёхугольник CA_1IB_1 — квадрат. Воспользуемся тем фактом, что точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной треугольника, симметричны относительно этой стороны. Тогда $IA_1 = CB_1 = AB_2$ и $IA_1 \perp BC$, $AB_2 \perp BC$, откуда $IA_1 \parallel AB_2$. Значит, IA_1B_2A — параллелограмм. Аналогично, четырёхугольник IB_1A_2B также является параллелограммом.

Понятно, что отрезки IA_1 и IB_1 — касательные к окружности с центром в точке C с радиусом CA_1. А любая точка X, лежащая на меньшей дуге A_1B_1 видна под углом 135° касается Легко подсчитать, что $\angle AIB = 90^\circ + \angle ACB/2 = 135^\circ$. А из параллельности $AI \parallel B_2A_1$ и $BI \parallel A_2B_1$ следует, что $\angle B_1DA_1 = \angle A_2DB_2 = \angle BIA = 135^\circ$. Значит, точка D лежит на окружности ω. Осталось заметить, что из свойства вписанного угла и касательной следует равенства $\angle BAC = 2\angle IAB_2 = 2\angle IA_1B_2 = \angle DCA_1$.



№3. Найдите все пары натуральных чисел a и b таких, что существуют натуральные числа m, n такие, что $a^3 + b = 2^m$, $b^3 + a = 2^n$.

Ответ: $(a, b) = (1, 1); (5, 3); (3; 5)$.

Решение. 1) Если одно a или b четно, то и другое четное. Пусть $a = 2^\alpha \cdot A$, $b = 2^\beta \cdot B$, где $(A, 2) = (B, 2) = 1$, и α, β — натуральные числа. Без потери общности (БОО), возьмем $\alpha \geqslant \beta$. Тогда

$$2^m = a^3 + b = 2^\beta(2^{3\alpha-\beta} \cdot A^3 + B) \Rightarrow B = 2^{m-\beta} - 2^{3\alpha-\beta} \cdot A^3 \vdots 2,$$

что неверное, так как B — нечетно.

2) Если $b = 1$, то $a + 1 = 2^n$, $a^3 + 1 = 2^m$, откуда $a^2 - a + 1 = 2^{m-n}$. Но $a^2 - a + 1 \not\vdots 2$, поэтому $m = n$, $a^2 - a + 1 = 1$, $a = 1$.

3) Пусть $a, b \geqslant 3$ — нечетные числа. Тогда $m, n \geqslant 5$. БОО положим $m \geqslant n$. Тогда

$$a \equiv -b^3 \pmod{2^n} \Rightarrow 0 \equiv 2^m \equiv a^3 + b \equiv b - b^9 \pmod{2^n} \Rightarrow b^8 - 1 \vdots 2^n.$$

$$n \leqslant v_2(b^8 - 1) = v_2(b-1) + v_2(b+1) + v_2(8) - 1 = v_2(b-1) + v_2(b+1) + 2.$$

Следовательно, или $b - 1 \vdots 2^{n-3}$, или $b + 1 \vdots 2^{n-3}$. Пусть $n - 3 = t \geqslant 2$. Тогда $b \geqslant 2^t - 1$, откуда

$$2^{t+3} - 1 = 2^n - 1 \geqslant 2^n - a = b^3 \geqslant (2^t - 1)^3 \Rightarrow 2^{2t} - 3 \cdot 2^t - 5 \leqslant 0. \qquad (1)$$

Если $t \geqslant 3$, то $2^{2t} - 3 \cdot 2^t - 5 = 2^t(2^t - 3) - 5 \geqslant 35 > 0$, что неверное по (1). Значит, $t = 2$, т.е. $n = 5$, $b^3 + a = 32$, $b = 3$, $a = 5$, $m = 7$.

Олимпиада 4

№1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Серединные перпендикуляры отрезков AD и BC пересекают прямые BC и AD соответственно в точках P и Q. Докажите, что $\angle APD = \angle BQC$.

№2. Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство $\{n\sqrt{7}\} > \frac{3\sqrt{7}}{14n}$, где $\{x\}$ означает дробную часть числа x.

№3. Докажите, что для любого натурального n существует число M_n, кратное 5^n, содержащее n цифр, отличных от нуля (ни одна цифра не равна нулю).

Олимпиада 4

№1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Серединные перпендикуляры отрезков AD и BC пересекают прямые BC и AD соответственно в точках P и Q. Докажите, что $\angle APD = \angle BQC$.

№2. Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство $\{n\sqrt{7}\} > \frac{3\sqrt{7}}{14n}$, где $\{x\}$ означает дробную часть числа x.

№3. Докажите, что для любого натурального n существует число M_n, кратное 5^n, содержащее n цифр, отличных от нуля (ни одна цифра не равна нулю).

Олимпиада 4

№1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Серединные перпендикуляры отрезков AD и BC пересекают прямые BC и AD соответственно в точках P и Q. Докажите, что $\angle APD = \angle BQC$.

№2. Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство $\{n\sqrt{7}\} > \frac{3\sqrt{7}}{14n}$, где $\{x\}$ означает дробную часть числа x.

№3. Докажите, что для любого натурального n существует число M_n, кратное 5^n, содержащее n цифр, отличных от нуля (ни одна цифра не равна нулю).

Олимпиада 4

№1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Серединные перпендикуляры отрезков AD и BC пересекают прямые BC и AD соответственно в точках P и Q. Докажите, что $\angle APD = \angle BQC$.

№2. Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство $\{n\sqrt{7}\} > \frac{3\sqrt{7}}{14n}$, где $\{x\}$ означает дробную часть числа x.

№3. Докажите, что для любого натурального n существует число M_n, кратное 5^n, содержащее n цифр, отличных от нуля (ни одна цифра не равна нулю).

Олимпиада 4. Решения задач

№1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Серединные перпендикуляры отрезков AD и BC пересекают прямые BC и AD соответственно в точках P и Q. Докажите, что $\angle APD = \angle BQC$.

Решение. Разберем случай, когда P лежит на луче CB, Q лежит на луче DA (за точки B и Q соответственно). Пусть M — середина AD, N — середина BC. Тогда M, N лежат на окружности с диаметром PQ (1), и $MN \parallel AB$ (2). Из (1) следует $\angle BPQ = \angle NMD$. Следовательно, из (2) следует, что $ABPQ$ — вписанный четырехугольник. Тогда $\angle QAP = \angle QBP$. Два последних угла, это внешние углы при основаниях AD и CB в равнобедренных треугольниках ADP и BCQ, поэтому эти треугольники подобны. Этого достаточно для решения задачи.

Остальные случаи расположения точек разберите самостоятельно.

Замечание. К задаче можно привести только одно решение (игнорируя расположения точек), используя ориентированные углы.

№2. Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство $\{n\sqrt{7}\} > \frac{3\sqrt{7}}{14n}$, где $\{x\}$ означает дробную часть числа x.

Решение. Пусть $[n\sqrt{7}] = m$. $\sqrt{7}$ — число иррациональное, поэтому $n\sqrt{7} > [n\sqrt{7}] = m$, т. е. $n\sqrt{7} > m$, откуда $7n^2 - m^2 > 0$.

Заметим, что натуральное число

$$7n^2 - m^2 = \left(n\sqrt{7} - m\right)\left(n\sqrt{7} + m\right)$$

не может быть равно 1 или 2, так как число m^2 не может давать при делении на 7 остаток 6 или 5. Поэтому $7n^2 - m^2 \geqslant 3$. Значит,

$$3 \leqslant 7n^2 - m^2 = \left(n\sqrt{7} - m\right)\left(n\sqrt{7} + m\right) = \left\{n\sqrt{7}\right\}\left(n\sqrt{7} + m\right) < \left\{n\sqrt{7}\right\} \cdot 2n\sqrt{7},$$

откуда получим $\left\{n\sqrt{7}\right\} > \frac{3}{2n\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{14n}$.

№3. Докажите, что для любого натурального n существует число M_n, кратное 5^n, содержащее n цифр, отличных от нуля (ни одна цифра не равна нулю).

Решение.

Решение. Докажем по индукции.

База. Для $n = 1$ возьмем $M_1 = 5$.

Предположение. Пусть для $n = k$ существует число M_k такое, что $M_k \vdots 5^k$, то есть $M_k = 5^k \cdot t$.

Переход. Добавим перед числом M_k цифру a. Получим число

$$M_{k+1} = a \cdot 10^k + M_k = a \cdot 10^k + 5^k \cdot t = 5^k(a \cdot 2^k + t).$$

Докажем, что найдется ненулевая цифра a такая, что $a \cdot 2^k + t$ делится на 5.

Например, если $t \equiv 0 \pmod 5$, то достаточно выбрать $a = 5$.

Для остальных случаев $2^k \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod 5$ и $t \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod 5$ подберем a (см. ниже таблицу):

a	4	2	3	1	3	4	1	2	2	1	4	3	4	3	2	4
2^k	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
t	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4

Как видим, при любых 2^k и t найдется a такая, что $M_{k+1} = 5^k(a \cdot 2^k + t) \vdots 5^{k+1}$.